

Physikalisches Anfängerpraktikum
Universität Dortmund / Fachbereich Physik

Protokoll zu Versuch 206

**Die Wärmepumpe
am 09.05.2006**

von

Christophe Cauet und Tobias Brambach
Protokoll vom 23. Mai 2006

1 Einleitung

Nach dem zweiten Hauptsatz der Thermodynamik, geht, wenn man zwei Wärmespeicher verbindet, Wärme immer vom wärmeren auf das kältere System über. Wenn man diesen Prozess umkehren möchte, dann muss zusätzlich mechanische Arbeit aufgewandt werden. Dieser Vorgang wird durch eine sogenannte **Wärmepumpe** realisiert, deren Funktionsweise im Folgenden untersucht werden soll.

2 Theorie

2.1 Thermodynamische Grundlagen

Der erste Hauptsatz der Thermodynamik besagt, dass die Änderung der Wärme eines Systems gleich der Änderung seiner inneren Energie plus der zugeführten mechanischen Arbeit ist. Wenn nun gemäß Abbildung 1 zwischen zwei Wärmereservoir Energie mit Hilfe eines Kühlmittels transportiert werden soll, dann gilt, wenn durch das Kühlmittel die Wärme Q_2 aus dem kälteren Reservoir aufgenommen wird, und die mechanische Arbeit A im Kompressor verrichtet wird, für die an die wärmere Reservoir abgegebene Wärme

$$Q_1 = Q_2 + A. \quad (2.1)$$

Der Quotient aus Q_1 und A stellt die Gütezahl der Wärmepumpe dar:

$$\nu = \frac{Q_1}{A}. \quad (2.2)$$

Unter der Voraussetzung, dass der Prozess **reversibel** verläuft¹ kann mit dem zweiten Hauptsatz und mit den zu den Wärmemengen Q_1 und Q_2 gehörigen Temperaturen T_1 und T_2 die Beziehung

$$\frac{Q_1}{T_1} - \frac{Q_2}{T_2} = 0 \quad (2.3)$$

abgeleitet werden. Dabei bezeichnet man die Quotienten QT als **reduzierte Wärmemengen**. Die obige Voraussetzung ist jedoch nicht realistisch. Für existierende Wärmepumpen gilt daher die Beziehung

$$\frac{Q_1}{T_1} - \frac{Q_2}{T_2} > 0. \quad (2.4)$$

¹d.h. es wird keine Energie nach außen abgegeben, sondern die gesamte Energie bleibt innerhalb des beobachteten Systems

Für die Gütezahl der Wärmepumpe gilt damit

$$\nu \leq \frac{T_1}{T_1 - T_2}, \quad (2.5)$$

wobei der Fall „=“ für die ideale Wärmepumpe gilt. Man sieht also, dass eine Wärmepumpe günstiger arbeitet, wenn die Temperaturdifferenz zwischen den beiden Reservoiren möglichst gering ist. Für das Verhältnis zwischen aufgewandter mechanischer Arbeit und Temperaturgewinn im wärmeren Reservoir gilt damit

$$Q_1 \leq A \frac{T_1}{T_1 - T_2}. \quad (2.6)$$

2.2 Technische Funktionsweise der Wärmepumpe

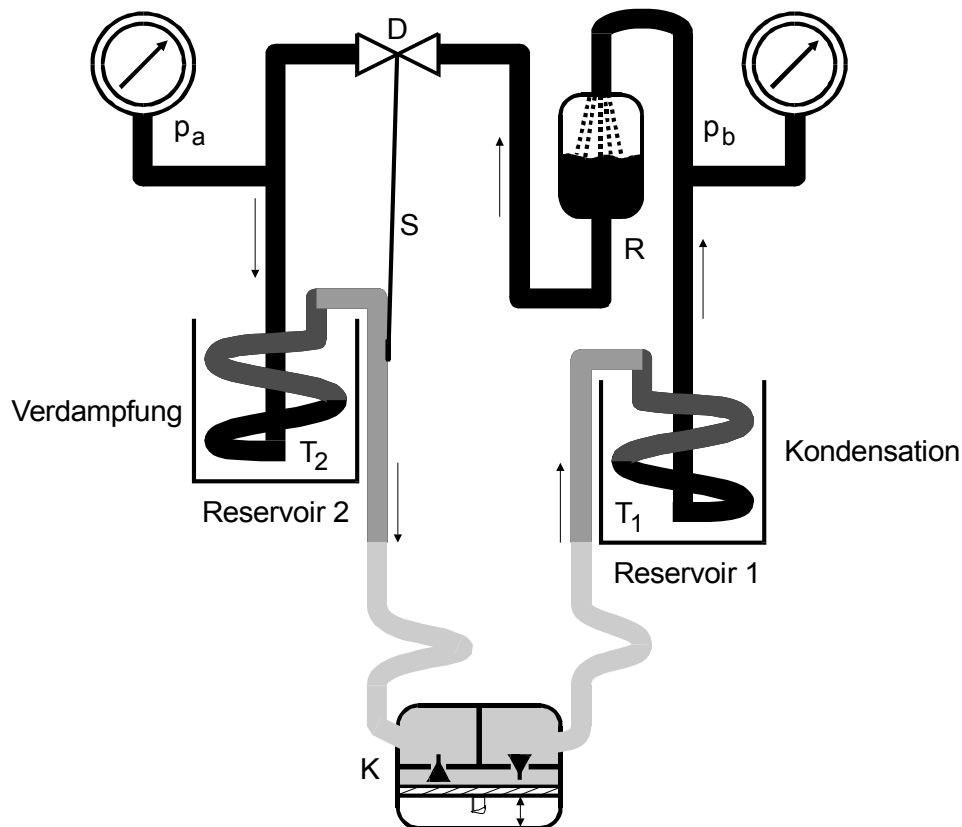


Abbildung 1: Grundsätzlicher Aufbau einer Wärmepumpe

Im vorangegangenen Abschnitt wurde der Begriff **Kompressor** in Zusammenhang mit einem **Kühlmittel** verwendet. Das Kühlmittel ist eine Substanz, die bei der Temperatur T_2 und beim Druck p_a (vgl. Abbildung 1) gasförmig ist und bei der Tempera-

tur T_1 unter dem Druck p_b flüssig. Die Wärme soll daher als **Phasenumwandlungsenergie** des Gases transportiert werden. Der Druckunterschied zwischen p_a und p_b ergibt sich aus dem Strömungswiderstand am Drosselventil D .

Nach dem Durchströmen von D verdampft das Kühlmittel im Reservoir 2 und nimmt dort die Verdampfungswäre L pro Gramm Substanz auf. Im Kompressor findet unter Aufwendung von mechanischer Arbeit eine nahezu **adiabatische** Kompression statt, bei der sich das Gas stark erwärmt. Im Reservoir 1 verflüssigt sich das Kühlmittel dann wieder und gibt die Kondensationswärme L pro Gramm ab. Von dort strömt das verflüssigte Kühlmittel dann zurück zum Drosselventil und schließt den Kreislauf.

Um die korrekte Funktion der Wärmepumpe zu gewährleisten, sind zusätzlich zwei weitere Armaturen angebracht. Der Reiniger R , der die im verflüssigten Kühlmittel verbliebenen Gasreste abscheidet und eine Steuerungsvorrichtung S an der Drosselklappe, die dafür sorgt, dass das Kühlmittel nur in gasförmigem Zustand in den Kompressor gelangt.

3 Durchführung

3.1 Kenngrößen der Wärmepumpe

Die wichtigen Kenngrößen einer Wärmepumpe sind

1. die Güteziffer
2. der Massendurchsatz $\frac{dm}{dt}$ des Transportmediums und
3. der Wirkungsgrad des Kompressors.

Sie lassen sich mit einer gemäß Abbildung 2 aufgebauten Apparatur ermitteln. Mit ihr kann man den Temperaturverlauf in den beiden Reservoirs, die Leistungsaufnahme des Kompressors sowie die Drücke p_a und p_b hinter und vor dem Drosselventil in Abhängigkeit von der Zeit messen. Vor dem Start der Messung muss in die beiden Reservoirs eine genau abgemessene Menge an Wasser eingefüllt werden. Zwei Rührmotoren gewährleisten, dass die Temperaturverteilung im Laufe des Experiments annähernd homogen bleibt.

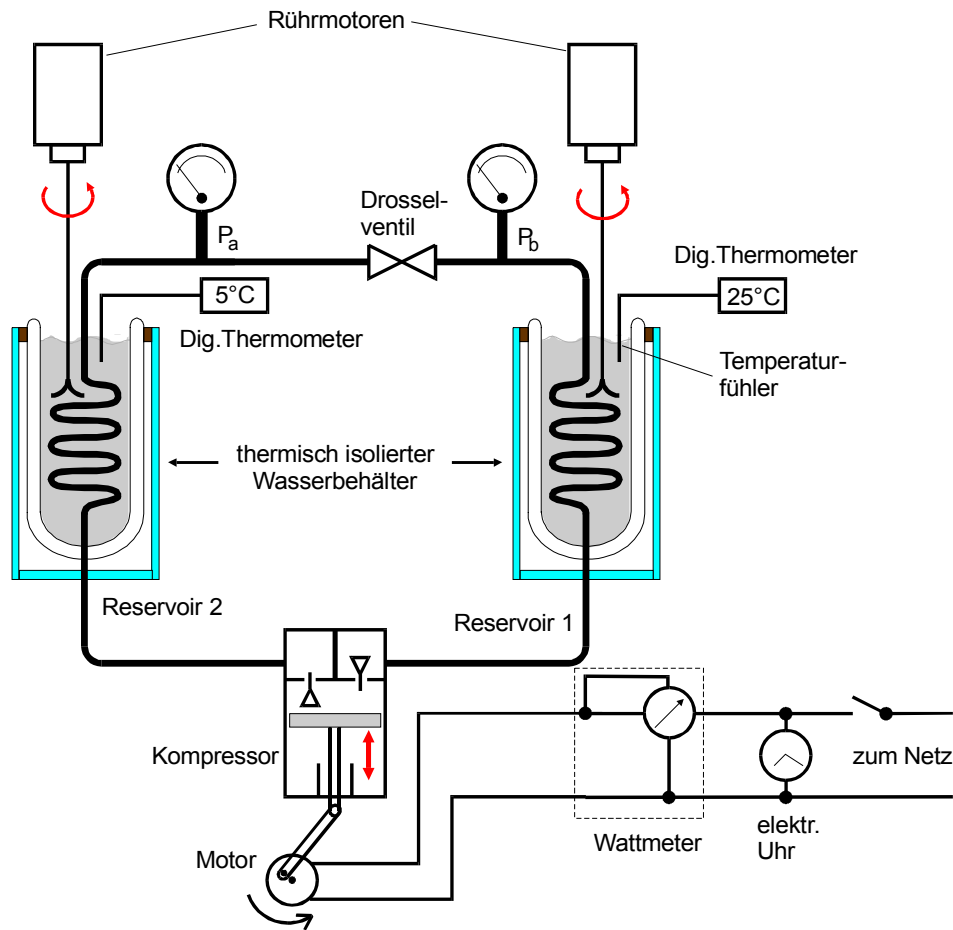


Abbildung 2: Schematische Darstellung des Versuchsaufbaus

1. Die reale Gütezahl

Die reale Gütezahl ν kann man bestimmen, indem man aus einer Messreihe $T_1(t)$ die Differenzquotienten $\frac{\Delta T_1}{\Delta t}$. Die pro Zeiteinheit gewonnene Wärmemenge kann man dann unter Zuhilfenahme der Wärmekapazität von Wasser $m_1 c_w$ und der der Kupferschlange und des Eimers $m_k c_k$ mit

$$\frac{\Delta Q_1}{\Delta t} = (m_1 c_w + m_k c_k) \frac{\Delta T_1}{\Delta t} \quad (3.1)$$

berechnen. Wenn man die über das Zeitintervall Δt gemittelte Leistungsaufnahme N des Kompressors kennt, kann man die Gütezahl ν berechnen durch

$$\nu = \frac{\Delta Q_1}{\Delta t N}. \quad (3.2)$$

2. Der Massendurchsatz

Aus einer Messreihe $T_2(t)$ kann man auch hier die Differenzquotienten $\frac{\Delta T_2}{\Delta t}$ bestim-

men. Auch hier gilt die Gleichung (3.1) mit Q_2 und T_2 für die pro Zeiteinheit aus dem Reservoir 2 entnommene Wärmemenge. Wenn nun die Verdampfungswärme L des Kühlmittels bekannt ist, kann der Massendurchsatz aus

$$\frac{\Delta Q_2}{\Delta t} = L \frac{\Delta m}{\Delta t} \quad (3.3)$$

berechnet werden, da ja die Wärmeentnahme durch die Verdampfung des Transportmediums geschieht und dabei die Verdampfungswärme L pro Massen- und Zeiteinheit verbraucht wird.

3. Die mechanische Kompressorleistung

Die mechanische Kompressorleistung kann man berechnen, wenn man annimmt, dass die Kompression adiabatisch erfolgt und damit die POISSON'sche Gleichung gilt. Wenn man das Gasvolumen des Kühlmittels von V_a nach V_b und damit auch den Druck von p_a nach p_b verändert, dann kann man für die Kompressorleistung

$$\begin{aligned} N_{mech} &= \frac{\Delta A_m}{\Delta t} = \frac{1}{\kappa-1} \left(p_b \sqrt[\kappa]{\frac{p_a}{p_b}} - p_a \right) \frac{\Delta V_a}{\Delta t} \\ &= \frac{1}{\kappa-1} \left(p_b \sqrt[\kappa]{\frac{p_a}{p_b}} - p_a \right) \frac{1}{\rho} \frac{\Delta m}{\Delta t} \end{aligned} \quad (3.4)$$

schreiben. ρ ist dann die Dichte des Kühlmittels im gasförmigen Zustand. Diese ist näherungsweise mit der Idealen Gasgleichung aus dem Literaturwert ρ_0 für Normalbedingungen ($p = 1[\text{bar}]$, $T = 273.15[\text{K}]$) zu errechnen.

4 Auswertung

In den folgenden Abschnitten werden immer wieder Rechnungen für die Fehlerrechnung benötigt. Um das Lesen des Textes einfacher zu gestalten, sollen jetzt die wichtigsten Formeln kurz dargestellt werden. Der **Mittelwert**:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad (4.1)$$

Der Mittelwert ist ein Näherungswert für den wahren Wert einer Messreihe aus n Einzelmessungen x_i . Der Mittelwert wird in weiteren Schritten als „wahrer“ Wert der gemessenen Größe verwendet. Er ist jedoch fehlerbehaftet. Der **mittlere Fehler des Mittelwertes**:

$$\bar{\sigma}_n = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n(n-1)}} \quad (4.2)$$

gibt eben diesen Fehler der Näherung an. Stellt man fest, dass der Fehler einer Größe mit anderen fehlerbehafteten Größen korreliert, so muss diese Einflussnahme mit Hilfe einer **Fehlerfortpflanzung** berechnet werden. Für ein Produkt a von fehlerbehafteten Größen x und y mit den Fehlern r_x, r_y gilt:

$$\begin{aligned} a &= x^m y^n \\ r_a &= \sqrt{m^2 r_x^2 + n^2 r_y^2} \end{aligned} \quad (4.3)$$

Durch diese einfache Summierung der Fehlerquadrate der einzelnen Messgrößen (r_i) kann schnell der resultierende Fehler bestimmt werden. Der Fehler r ist ein **relativer Fehler**. Er berechnet sich aus

$$r = \frac{\bar{\sigma}_n}{\bar{x}} \quad (4.4)$$

4.1 Temperaturverlauf

Der Temperaturverlauf der beiden gemessenen Temperaturen T_1 und T_2 wird in Abbildung 3 dargestellt.

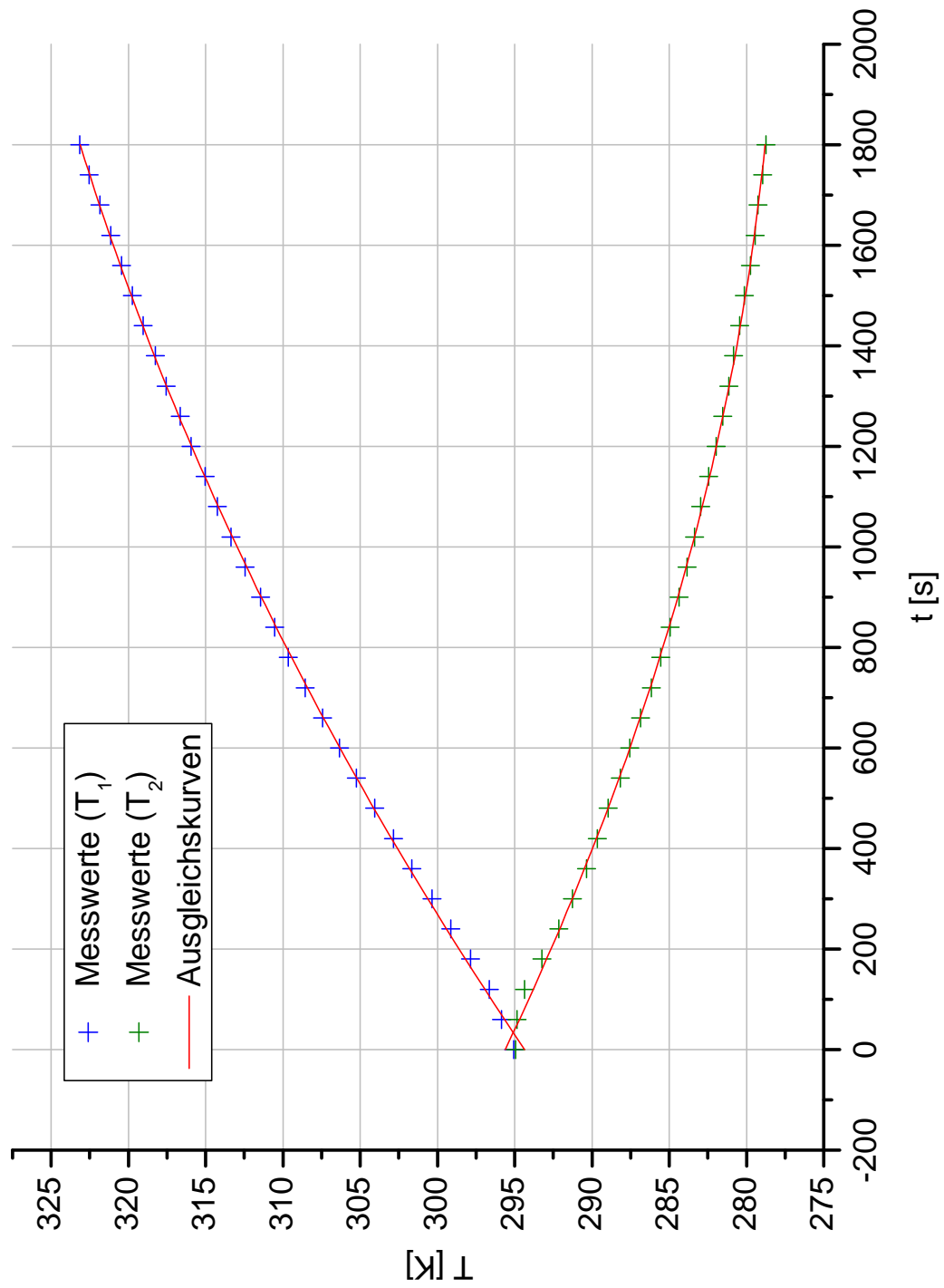


Abbildung 3: Verlauf der Temperaturen in den beiden Reservoiren

Tabelle 1 beinhaltet die Messergebnisse des Experiments.

$t[\text{min}]$	$t[\text{s}]$	$T_1[^\circ\text{C}]$	$T_1[\text{K}]$	$p_b[\text{bar}]$	$T_2[^\circ\text{C}]$	$T_2[\text{K}]$	$p_a[\text{bar}]$
0	0	21.90	295.05	5.00	21.80	294.95	3.80
1	60	22.70	295.85	5.10	21.70	294.85	3.40
2	120	23.50	296.65	5.80	21.20	294.35	3.60
3	180	24.70	297.85	6.00	20.10	293.25	3.75
4	240	26.00	299.15	6.20	19.00	292.15	3.80
5	300	27.20	300.35	6.50	18.10	291.25	3.75
6	360	28.50	301.65	6.80	17.20	290.35	3.60
7	420	29.70	302.85	7.00	16.50	289.65	3.50
8	480	30.90	304.05	7.20	15.80	288.95	3.40
9	540	32.10	305.25	7.50	15.00	288.15	3.15
10	600	33.20	306.35	7.80	14.40	287.55	3.10
11	660	34.30	307.45	7.90	13.70	286.85	3.10
12	720	35.40	308.55	8.00	13.00	286.15	3.05
13	780	36.50	309.65	8.20	12.40	285.55	3.05
14	840	37.40	310.55	8.50	11.80	284.95	3.00
15	900	38.30	311.45	8.80	11.20	284.35	2.95
16	960	39.30	312.45	8.90	10.70	283.85	2.90
17	1020	40.20	313.35	9.00	10.20	283.35	2.90
18	1080	41.10	314.25	9.20	9.80	282.95	2.85
19	1140	41.90	315.05	9.40	9.30	282.45	2.80
20	1200	42.80	315.95	9.70	8.80	281.95	2.80
21	1260	43.50	316.65	9.90	8.40	281.55	2.80
22	1320	44.40	317.55	10.00	8.00	281.15	2.75
23	1380	45.10	318.25	10.10	7.70	280.85	2.70
24	1440	45.90	319.05	10.40	7.30	280.45	2.70
25	1500	46.60	319.75	10.60	7.00	280.15	2.65
26	1560	47.30	320.45	10.80	6.60	279.75	2.60
27	1620	48.00	321.15	10.90	6.30	279.45	2.60
28	1680	48.70	321.85	11.00	6.10	279.25	2.60
29	1740	49.40	322.55	11.20	5.80	278.95	2.60
30	1800	50.00	323.15	11.30	5.60	278.75	2.60

Tabelle 1: Sämtliche Messwerte des Versuchs bei einer konstanten Kompressorleistung von 125W.

4.2 Bestimmung der Differentialquotienten

Die Bestimmung der Differentialquotienten für 4 unterschiedliche Temperaturen gelingt mit Hilfe einer linearen Regression der Form $T(t) = at^2 + bt + c$. Mit ORIGIN 7.0 PRO bestimmen wir die Koeffizienten für T_1 auf:

$$\begin{aligned} a &= (-0.00000329 \pm 0.00000014) \frac{\text{K}}{\text{s}^2} \\ &= -0.00000329(1 \pm 0.041) \frac{\text{K}}{\text{s}^2} \\ b &= (0.02191 \pm 0.00025) \frac{\text{K}}{\text{s}} \\ &= 0.02191(1 \pm 0.011) \frac{\text{K}}{\text{s}} \\ c &= (294.353 \pm 0.098) \text{K} \\ &= 294.353(1 \pm 0.0003) \text{K}, \end{aligned}$$

und für T_2 auf:

$$\begin{aligned} a &= (0.00000342 \pm 0.00000013) \frac{\text{K}}{\text{s}^2} \\ &= 0.00000342(1 \pm 0.038) \frac{\text{K}}{\text{s}^2} \\ b &= (-0.01549 \pm 0.00024) \frac{\text{K}}{\text{s}} \\ &= -0.01549(1 \pm 0.016) \frac{\text{K}}{\text{s}} \\ c &= (295.610 \pm 0.094) \text{K} \\ &= 295.610(1 \pm 0.0003) \text{K}. \end{aligned}$$

Durch Ableiten der Gleichung ($\dot{T}(t) = 2at + b$) und einfaches Einsetzen von vier Werten kann jetzt der Quotient dT/dt berechnet werden. Tabelle 2 zeigt die Werte für T_1 und T_2 .

	T1 [300s]	T2 [600s]	T3 [1200s]	T4 [1800s]
T_1	0.01994 ± 0.00085	0.01796 ± 0.00077	0.01401 ± 0.00060	0.01006 ± 0.00043
T_2	-0.01344 ± 0.00055	-0.01139 ± 0.00047	-0.00729 ± 0.00030	-0.00319 ± 0.00013

Tabelle 2: Differentialquotienten $\frac{dT_1}{dt}$ und $\frac{dT_2}{dt}$ der gemessenen Temperaturverläufe für 4 verschiedene Temperaturen $[\frac{\text{K}}{\text{s}}]$.

4.3 Güteziffern der Wärmepumpe

Die Güte der Apparatur kann nun mit der Formel $\nu = \frac{\Delta Q_1}{\Delta t \cdot N} = \frac{m_1 c_w + m_k c_k}{N} \cdot \frac{\Delta T_1}{\Delta t}$ abgeschätzt werden. Die zur Berechnung benötigte Wärmekapazität beträgt laut Literaturwerten $m_1 c_w = m_1 \cdot 4.19 \cdot 10^3 \text{ J/kgK} = 16748 \text{ J/K}$. Die Wärmekapazität der am Prozess beteiligten Anlagenteile beträgt $m_k c_k = 750 \text{ J/K}$. Tabelle 3 beinhaltet die 4 verschiedenen Güteziffern für die unterschiedlichen Temperaturen.

	T1 [300s]	T2 [600s]	T3 [1200s]	T4 [1800s]
ν_{real}	2.79 ± 0.12	2.51 ± 0.11	1.961 ± 0.084	1.408 ± 0.060
ν_{ideal}	33.0055	16.2952	9.2926	7.2782
$\Delta\nu$	30.2149	13.7811	7.3314	5.8699
Abweichung	91.55%	84.57%	78.90%	80.65%

Tabelle 3: Güteziffer ν der im Experiment genutzten Wärmepumpe

4.4 Massendurchsatz

Zur Berechnung des Massendurchsatzes des benutzten Transportgases muss zunächst die Verdampfungswärme L bestimmt werden. Nach V203 lässt sich diese einfach aus Wertepaaren (p, T) der Dampfdruckkurve bestimmen. Abbildung 4 zeigt die aufgetragenen Werte und die entsprechende Ausgleichsgerade. Tabelle 4 enthält die zur Berechnung benötigten Zwischenwerte.

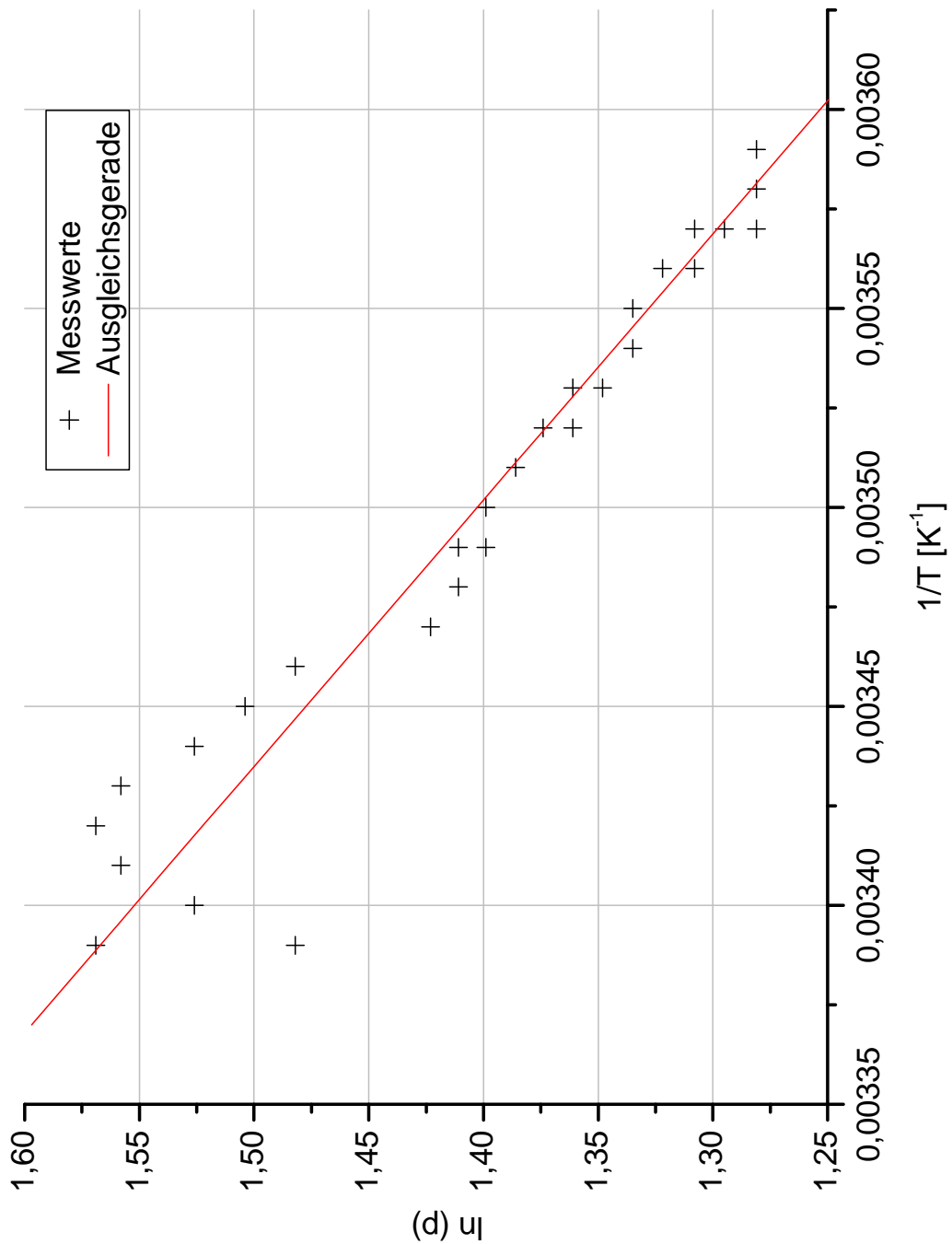


Abbildung 4: Lineare Regression zur Bestimmung der Verdampfungswärme.

$T_2 [^{\circ}\text{C}]$	$1 + p_a [\text{bar}]$	$\frac{1}{T} [\text{K}^{-1}]$	$\ln(p_a [\text{bar}])$
21.80	4.80	0.00339	1.569
21.70	4.40	0.00339	1.482
21.20	4.60	0.00340	1.526
20.10	4.75	0.00341	1.558
19.00	4.80	0.00342	1.569
18.10	4.75	0.00343	1.558
17.20	4.60	0.00344	1.526
16.50	4.50	0.00345	1.504
15.80	4.40	0.00346	1.482
15.00	4.15	0.00347	1.423
14.40	4.10	0.00348	1.411
13.70	4.10	0.00349	1.411
13.00	4.05	0.00349	1.399
12.40	4.05	0.00350	1.399
11.80	4.00	0.00351	1.386
11.20	3.95	0.00352	1.374
10.70	3.90	0.00352	1.361
10.20	3.90	0.00353	1.361
9.80	3.85	0.00353	1.348
9.30	3.80	0.00354	1.335
8.80	3.80	0.00355	1.335
8.40	3.80	0.00355	1.335
8.00	3.75	0.00356	1.322
7.70	3.70	0.00356	1.308
7.30	3.70	0.00357	1.308
7.00	3.65	0.00357	1.295
6.60	3.60	0.00357	1.281
6.30	3.60	0.00358	1.281
6.10	3.60	0.00358	1.281
5.80	3.60	0.00358	1.281
5.60	3.60	0.00359	1.281

Tabelle 4: Tabelle mit Zwischenwerten zur Berechnung der Verdampfungswärme

Es ist jetzt ersichtlich, dass über eine lineare Regression der Form $y = bx + a$, L bestimmt werden kann:

$$\ln p = \frac{L}{R} \frac{1}{T} + \text{const.} \quad (4.5)$$

Die Ausgleichsrechnung ergibt:

$$\begin{aligned} a &= 6.63 \pm 0.25 \\ &= 6.63(1 \pm 0.038) \\ b &= -1494 \pm 71 \\ &= -1494(1 \pm 0.048), \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} L &= -b \cdot R = 1494 \text{ K} \cdot 8.314472 \frac{\text{J}}{\text{mol K}} \\ &= (1.24 \pm 0.0594) \cdot 10^4 \frac{\text{J}}{\text{mol}} \\ &= 1.24(1 \pm 0.048) \cdot 10^4 \frac{\text{J}}{\text{mol}} \end{aligned}$$

(R : Allgemeine Gaskonstante)

Weiter geht es mit der Berechnung des Massendurchsatzes nach Formel 3.3. Tabelle 5 fasst die so berechneten Werte zusammen. Zur Umrechnung des Durchsatzes von $\frac{\text{mol}}{\text{s}}$ in $\frac{\text{g}}{\text{s}}$ benötigt man die Molmasse von Dichlordifluormethan mit $M = 120.9 \frac{\text{g}}{\text{mol}}$.

	T1 [300s]	T2 [600s]	T3 [1200s]	T4 [1800s]
dm/dt [mol/s]	0.0189	0.0160	0.0103	0.0045
dm/dt [g/s]	2.288 ± 0.144	1.939 ± 0.122	1.241 ± 0.078	0.543 ± 0.034

Tabelle 5: Ergebnisse des berechneten Massendurchsatzes für das benutzte Transportgas Dichlordifluormethan.

4.5 Kompressorleistung

Zur Berechnung der Kompressorleistung muss zunächst aus ρ_0, ρ berechnet werden. Es gilt nach der idealen Gasgleichung $pV = nRT$:

$$\frac{p_0 V_0}{T_0} = \frac{p_a V_2}{T_2} \quad (4.6)$$

woraus sich für die Dichte

$$\rho = \frac{\rho_0 p_a T_0}{p_0 T_2} \quad (4.7)$$

ergibt. Anschließend reicht das Einsetzen der so gewonnenen Werte in Formel 3.4 zur Bestimmung der mechanischen Kompressorleistung N_{mech} . Tabelle 6 beinhaltet die Ergebnisse. Als Normalbedingungen wurde angenommen: $\rho_0 = 5.51 \text{g}/\ell$, $T_0 = 273.15 \text{K}$

und $p_0 = 1 \text{ bar} = 1 \cdot 10^5 \text{ pa}$. Der Kompressor lieferte während des kompletten Messvorgangs eine Leistung von 125W.

	T1 [300s]	T2 [600s]	T3 [1200s]	T4 [1800s]
$\rho[\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}]$	24.55	21.46	20.28	19.44
$N_{\text{mech}}[\text{W}]$	18.25	26.03	22.52	11.71

Tabelle 6: Kompressorleistung für 4 verschiedene Druckdifferenzen.

5 Diskussion

Die Bestimmung der Gütezahl unterliegt einem großen, stark schwankenden Fehler. Dies ist möglicherweise auf die nur unzureichende Isolation der Wasserreservoirs und den damit verbundenen Wärmeverlust zurückzuführen. Ein weiterer Grund für die Abweichungen vom idealen Wert kann in der Erwärmung des Kompressors gesucht werden, durch welche unter Umständen nicht mehr von einer adiabatischen Kompression auszugehen ist.

6 Literatur & Bildnachweise

Sämtliche Abbildungen in den Abschnitten 2 und 3 sind aus dem Praktikumsskript entnommen.

Die Wärmepumpe (206)

Experimentelle Übungen für Physiker, Version vom 23. Mai 2006

<http://berners-lee.physik.uni-dortmund.de/praktikum/>

AP-Anleitungen/Waermelehre/Versuch%20Nr.206.pdf