

Physikalisches Anfängerpraktikum
Universität Dortmund / Fachbereich Physik

Protokoll zu Versuch 207

Temperatur-Strahlung

am 02.05.2006

von

Christophe Cauet und Tobias Brambach

Protokoll vom 9. Mai 2006

1 Einleitung

Die Elektronen in Festkörpern befinden sich bei Temperaturen über dem absoluten Nullpunkt immer teilweise in angeregten Zuständen. Aus diesen Zuständen wechseln sie in weniger angeregte oder in den Grundzustand über und geben dabei ihren Energieüberschuss in Form von Strahlung ab. Für diese Temperatur- oder auch Wärmestrahlung existiert eine Funktion $P(\lambda, T)$, die nur von der Wellenlänge λ und der absoluten Temperatur T des emittierenden Körpers abhängt und die Strahlungsleistung mit Bezug auf diese Größen darstellt. Nach ihrem Entdecker MAX PLANCK wird sie auch PLANCK'sches Strahlungsgesetz genannt. Eine Integration über alle Wellenlängen liefert hiervon ausgehend die Gesamtstrahlungsleistung $S(T)$ pro Flächen- und Raumwinkeleinheit, als STEFAN-BOLTZMANN-Gesetz bekannt. Im Folgenden sollen diese Gesetze untersucht werden.

2 Theorie

2.1 Der Schwarze Körper

Sowohl das PLANCK'sche Strahlungsgesetz als auch das STEFAN-BOLTZMANN-Gesetz gelten im Speziellen für einen sogenannten Schwarzen Körper. Man meint hiermit einen Strahler mit Absorptionsvermögen $A_S(\lambda = 1$ für alle Wellenlängen. Er absorbiert also alle auf ihn einfallende elektromagnetische Strahlung vollständig. Sowohl in Bezug auf das Absorptionsvermögen, als auch auf das vollkommen auszuschließende Reflexionsvermögen $R_S(\lambda) = 1 - A_S(\lambda = 0$ das daraus folgt, ist dieser Körper ein in der Natur nur angenähert zu beobachtendes Phänomen. Als beste Näherung hat sich ein Hohlraum mit Wänden aus strahlungsdichtem Material $A > 0, R > 0$ bewiesen. Die im Inneren durch Absorptions- und Emissionsvorgänge gebildete und durch ein Loch in der Oberfläche des Hohlraums austretende Strahlung besitzt das Strahlungsspektrum eines Schwarzen Körpers. Der Schwarze Körper besitzt zudem das höchste denkbare Emissionsvermögen aller Temperaturstrahler.

2.2 Das PLANCK'sche Strahlungsgesetz

Es soll nun die Funktion $P(\lambda, T)$ hergeleitet werden. Stellt man sich den Schwarzen Körper als einen Hohlraumresonator beliebiger Gestalt aber mit elektrisch gut leitenden Wänden vor, so lassen sich die möglichen elektromagnetischen Eigenschwin-

gungen errechnen. Die Zahl Z der möglichen Eigenschwingungen beträgt:

$$Z = \frac{8}{3} \pi \frac{\nu^3}{c^3} a^3 \quad (2.1)$$

Für ein begrenztes Frequenzintervall ν bis $\nu + d\nu$ gilt:

$$dZ = 8\pi \frac{\nu^2}{c^3} a^3 d\nu \quad (2.2)$$

Die spektrale Energieverteilung ergibt sich jetzt aus dem Produkt mit der mittleren Energie $\langle u \rangle = 2 \cdot \frac{1}{2} kT$ pro Schwingungsfreiheitsgrad. Dadurch ergibt sich das RAYLEIGH-JEANS'sche-Strahlungsgesetz:

$$du(\nu, T) = \langle u \rangle dZ' = 8\pi \frac{\nu^2}{c^3} kT d\nu, \quad (2.3)$$

mit der auf die Volumeneinheit des Hohlraums entfallenden Zahl $dZ' = 8\pi \frac{\nu^2}{c^3} d\nu$. Gilt dieses Gesetz für kleine Frequenzen noch sehr gut, so stellt man fest, dass es bei der Integration über hohe Frequenzen zur sogenannten Ultraviolett Katastrophe kommt, da das Integral nicht mehr beschränkt ist.

MAX PLANCK gelang es, mit der Quantisierung des Eigenwertproblems, im Jahre 1900 diesen problematischen Punkt zu überwinden. Den Hohlraumsschwingungen mit der Eigenfrequenz ν ordnete er Oszillatoren zu, deren Gesamtenergie nur noch diskrete Werte annehmen können:

$$\Delta u = nh\nu \quad (2.4)$$

(Planck'sches Wirkungsquantum: $h = 6.624 \cdot 10^{-34} \text{Js}$ und $n = 1, 2, 3 \dots$)

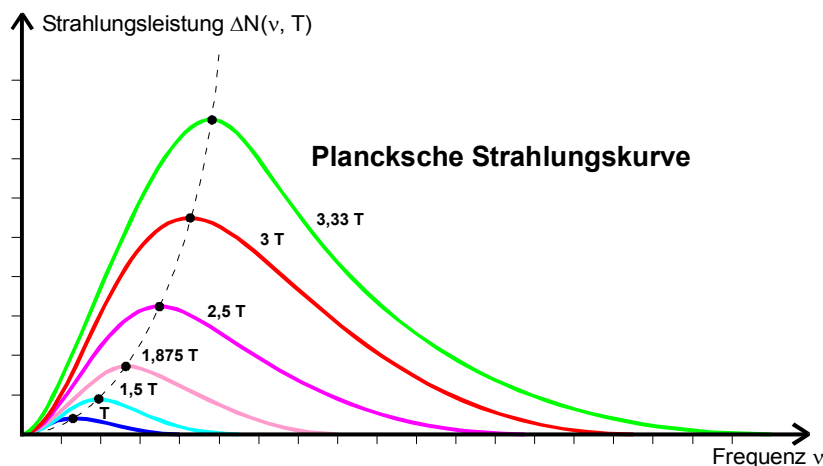


Abbildung 1: Das PLANCK'sche Strahlungsgesetz

Abbildung 1 zeigt die jetzt ableitbare PLANCK'sche Strahlungsformel als Plot für verschiedene Temperaturen:

$$dN(\nu, T) = \frac{2h}{c^2} \frac{\nu^3}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} d\nu \quad (2.5)$$

$$\Rightarrow dP(\lambda, T) = \frac{2hc^2}{\lambda^5 \left(\exp\left[\frac{hc}{k_B\lambda T}\right] - 1 \right)} d\lambda \quad (2.6)$$

Das Maximum der Emission ν_{max} erlangt man durch lösen der Gleichung $\frac{\partial N(\nu, t)}{\partial \nu} = 0$. Die Lösung $\nu_{max} = \mu T$ mit $\mu = 1.033 \cdot 10^{11} \frac{\text{Hz}}{\text{K}}$ wird als das WIEN'sche Verschiebungsgesetz bezeichnet.

2.3 Das STEFAN-BOLTZMANN'sche Gesetz

Auch hier soll jetzt die Gesamtstrahlungsleistung im kompletten Frequenzbereich über eine Integration der PLANCK'schen Strahlungsformel (2.5) bestimmt werden:

$$S(T) := \int_0^\infty dN(\nu, T) = \int_0^\infty \frac{2h}{c^2} \frac{\nu^3}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} d\nu \quad (2.7)$$

Die Lösung:

$$S(T) = \frac{2}{15} \pi^4 \frac{k^4}{c^2 h^3} T^4 \quad (2.8)$$

wird STEFAN-BOLTZMANN-Gesetz genannt. Auffällig ist das Anwachsen der Gesamtstrahlungsleistung des Strahlers mit der vierten Potenz der absoluten Temperatur. Möchte man dies nun in einem Experiment verifizieren, müssen einige weitere Annahmen bezüglich der Strahlungsleistung pro Raumwinkel und der Absorptionseigenschaft des Detektors gemacht werden, die schließlich auf die Gesamtstrahlungsbilanz

$$S(T)_{Ges} = \frac{\sigma}{\pi} (T^4 - T_E^4) \frac{\Delta F_S \Delta F_E}{r^2} \quad (2.9)$$

(Stefan-Boltzmann Konstante $\sigma := \pi \frac{2}{15} \pi^4 \frac{k^4}{c^2 h^3}$)

führen. Die dabei in einen Halbraum bzw. Halbkugel abgegebene Strahlungsleistung $S(T)_{2\pi}$ entspricht dabei dem Integral:

$$S(T)_{2\pi} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} S(T) \sin \theta \cos \theta d\theta d\varphi = \pi S(T) = \sigma T^4 \quad (2.10)$$

3 Durchführung

3.1 Beschreibung der Messapparatur

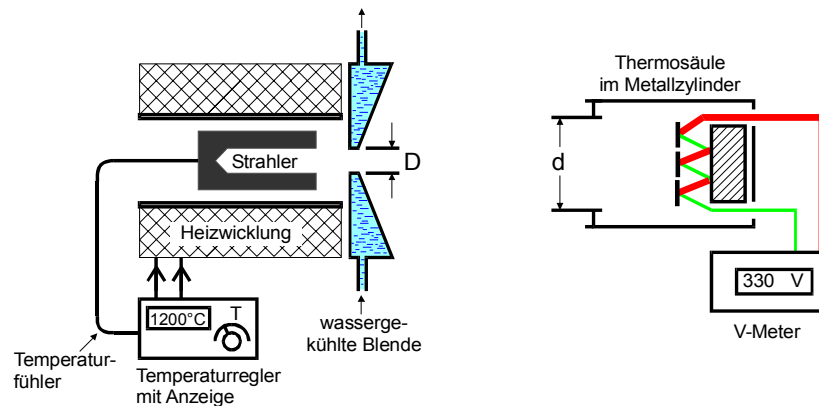


Abbildung 2: Schematische Darstellung des Versuchsaufbaus

Im Versuch wird die Hohlraumstrahlung in einem elektrisch geregelten Rohrofen erzeugt. Abbildung 2 zeigt den Versuchsaufbau schematisch. Der Ofen wird durch eine wassergekühlte Blende mit kreisförmiger Öffnung vom Durchmesser d_S abgeschirmt um eine Verfälschung der Messwerte durch von der Stirnseite des Ofens ausgehende Strahlung zu vermeiden. Die Strahlungsquelle kann also als die kreisförmige Öffnung in der Blende mit der Fläche ΔF_S angenommen werden. Als Detektor wird eine Thermosäule genutzt, an welcher man eine proportional zur einfallenden Strahlungsleistung stehende Spannung U_{Th} abgreifen kann. Die Thermosäule ist so konstruiert, dass jeweils die Hälfte der Kontaktstellen getroffen wird, während die nicht beleuchtete Hälfte thermisch leitend mit einem Kupferblock verbunden ist und eine konstante Temperatur hält.

3.2 Eichung der Thermosäule

Zur Eichung der Thermosäule wird diese mit einem Wechselstrom geheizt und eine Referenzspannung abgelesen. Dies geschieht nach Abbildung 3. Die so durch den Strom im Detektor zu messende Leistung beträgt:

$$N_{el} = \frac{U_{eff}^2}{R_{ges}^2} R_{th} \quad (3.1)$$

mit der Effektivspannung U_{eff} des Wechselstromgenerators, dem Widerstand R_{th} der Thermosäule und dem Gesamtwiderstand R_{ges} des Stromkreises. Der Eichfaktor f lässt sich dann nach $U_{th} = f \cdot N_{el}$ ableiten. Ausser der Thermosäule muss auch das

angeschlossene Voltmeter so geeicht werden, dass es im unbestrahlten Fall, also bei Raumtemperatur auf den Wert 0 eingeregelt ist.

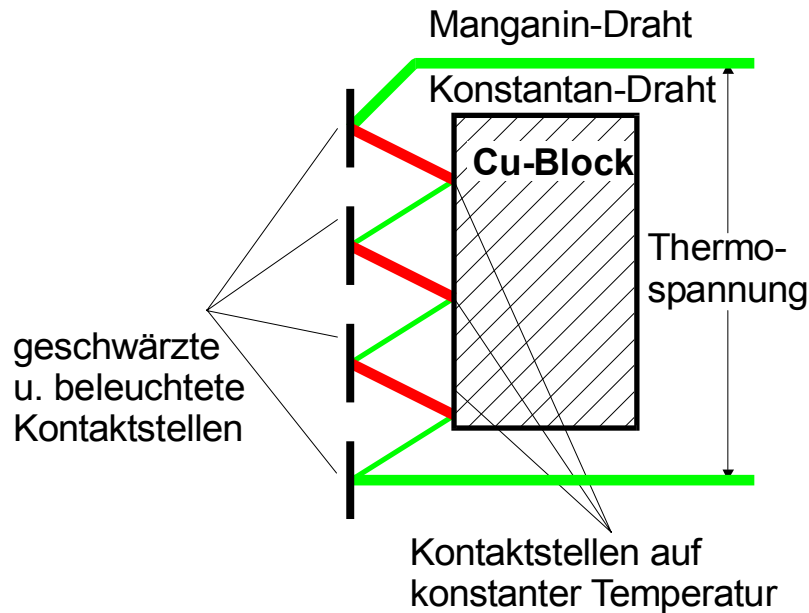


Abbildung 3: Schematische Darstellung des Aufbaus der Thermosäule

3.3 Messprogramm

Es sollen nun zuerst die Eichung der Thermosäule und der restlichen Messapparate durchgeführt werden. Anschließend wird die Abhängigkeit der gemessenen Spannung an der Thermosäule zur Temperatur des Strahlers aufgenommen. Der dritte Schritt besteht darin, den Zusammenhang zwischen der Entfernung des Strahlers von dem Detektor und der gemessenen Spannung aufzunehmen. Im letzten Schritt wird nun noch die spektrale Verteilung der Temperaturstrahlung mit Hilfe von Infrarot-Filtern gemessen.

4 Auswertung

4.1 Hinweise zur Fehlerrechnung

Bei der Auswertung der Messdaten wurden die folgenden drei Formeln angewandt: Der Mittelwert \bar{x} einer Messreihe mit n unabhängigen Messdaten x_i errechnet sich aus

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i. \quad (4.1)$$

Der beste Schätzwert auf einen absoluten Fehler Δx ist dann

$$\Delta x = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (\bar{x} - x_i)^2} \quad (4.2)$$

und der relative Fehler r_x folgt aus

$$r_x = \frac{\Delta x}{\bar{x}} \quad (4.3)$$

Der relative Fehler r auf durch „“ oder „/“ verbundene fehlerbehaftete Größen a und b folgt nach GAUSS aus

$$r = \sqrt{r_a^2 + r_b^2} \quad (4.4)$$

4.2 Eichung des Messgerätes

Zunächst wird mit einer Aluminiumstange der Länge 0.200 m der Abstand zwischen Emitter und Empfänger geeicht. Auf der Dreikantschiene entspricht dies einer Distanz von 0.167 m, das heißt, auf die abgelesenen Werte für die Distanz d auf der Schiene müssen 0.033 m addiert werden, um die Größe r zu erhalten.

Weiterhin sind die Durchmesser d_S der Emitterblende und der Blende vor der Thermosäule (d_E) von Bedeutung. Sie betragen

$$d_S = 0.0075 \text{ m}$$

$$d_E = 0.0080 \text{ m.}$$

Die Messung der Thermospannung U_{th} in Abhängigkeit der angelegten Leistung liefert die Messwerte in Tabelle 1. Dabei errechnet sich die elektrische Leistung N_{el} nach (3.1). Da die Werte für kleine U_{eff} offensichtlich mit einem systematischen Fehler be-

haftet sind, werden sie nicht mit in die Mittelwertbildung einbezogen. Berücksichtigt werden die Werte mit $U_{eff} \geq 5 \text{ V}$. Die Mittelwertbildung ergibt als Eichfaktor $\Psi = U_{th}/N_{el}$

$$\begin{aligned}\Psi &= (0.16879 \pm 0.00049) \frac{\text{V}}{\text{W}} \\ &= 0.16879(1 \pm 0.0029) \frac{\text{V}}{\text{W}}.\end{aligned}$$

U_{eff} [V]	U_{th} [μV]	N_{el} [mW]	Ψ [V/W]
1	8	0.031	0.26151
2	25	0.122	0.20431
3	51	0.275	0.18524
4	87	0.489	0.17775
5	130	0.765	0.16998
6	186	1.101	0.16889
7	254	1.499	0.16945
8	330	1.958	0.16855
9	414	2.478	0.16708

Tabelle 1: Darstellung der Messergebnisse der Eichung

Weiterhin werden die folgenden physikalischen Konstanten benutzt

$$\begin{aligned}c &= 299792458 \text{ m/s} \\ \sigma &= 5.6704 \cdot 10^8 \text{ W/m}^2\text{K}^4 \\ k_B &= 1.3806 \cdot 10^{-23} \text{ J/K} \\ h &= 6.62607 \cdot 10^{-34} \text{ Js}\end{aligned}\tag{4.5}$$

4.3 Messung der Strahlungsleistung in Abhängigkeit der Temperatur

Im Abstand von $r = 0.200 \text{ m}$ wird die Strahlungsleistung S in Abhängigkeit von der Temperatur T des Strahlers gemessen. Die Messwerte finden sich in Tabelle 2. Zunächst soll die Proportionalität zwischen S und T bestimmt werden. Dazu werden die Werte in einem logarithmischen Diagramm aufgetragen (Abbildung 4) und die Steigung der Geraden bestimmt. Diese soll den Exponenten E zu T liefern. Für den Exponenten ergibt sich ein Wert von $E = 5.10 \pm 0.12$. Dies liegt mehr als 25 % über

dem erwarteten $E_{th} = 4$. Daher wird für die weiteren Berechnungen der theoretische Wert verwendet.

T [K]	U_{th} [μ V]	S [mW]
673.15	12	0.07
773.15	22	0.13
873.15	39	0.23
973.15	62	0.37
1073.15	94	0.56
1173.15	15	0.94
1273.15	27	1.64
1323.15	34	2.01
1373.15	41	2.46
1423.15	50	3.02
1473.15	63	3.74

Tabelle 2: Darstellung der Messergebnisse bei Variation der Temperatur

In einem weiteren Diagramm (Abbildung 5) werden nun T^4 und S gegeneinander aufgetragen. Aufgrund der oben schon erwähnten Abweichungen ergibt sich hier kein vollständig linearer Zusammenhang. Da aber die Messwerte bei hohen Temperaturen wegen der höheren Messwerte für U_{th} und aufgrund der geringeren Störanfälligkeit durch äußere Einflüsse zuverlässiger sein sollten, versuchen wir nur die Werte zu berücksichtigen, die noch mit dem Wert für $T = 1473.15$ K auf einer Geraden liegen. Die Steigung m_T dieser Geraden (Abbildung 5) sollte die STEFAN-BOLTZMANN-Konstante sein, die noch um einen Faktor $\frac{\Delta F_E \Delta F_S}{\pi r^2}$ bereinigt werden muss. Es ergibt sich

$$\begin{aligned} m_T &= (1.008 \pm 0.040) \cdot 10^{-15} \frac{\text{W}}{\text{K}^4} \\ &= 1.008(1 \pm 0.039) \cdot 10^{-15} \frac{\text{W}}{\text{K}^4}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \sigma &= (5.70 \pm 0.23) \cdot 10^{-8} \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{K}^4} \\ &= 5.70(1 \pm 0.039) \cdot 10^{-8} \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{K}^4}. \end{aligned}$$

Ein Vergleich mit dem Literaturwert $\sigma_{lit} = 5.67 \cdot 10^{-8} \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{K}^4}$ zeigt, dass an dieser Stelle eine Abweichung von nur 0.59 % vorliegt.

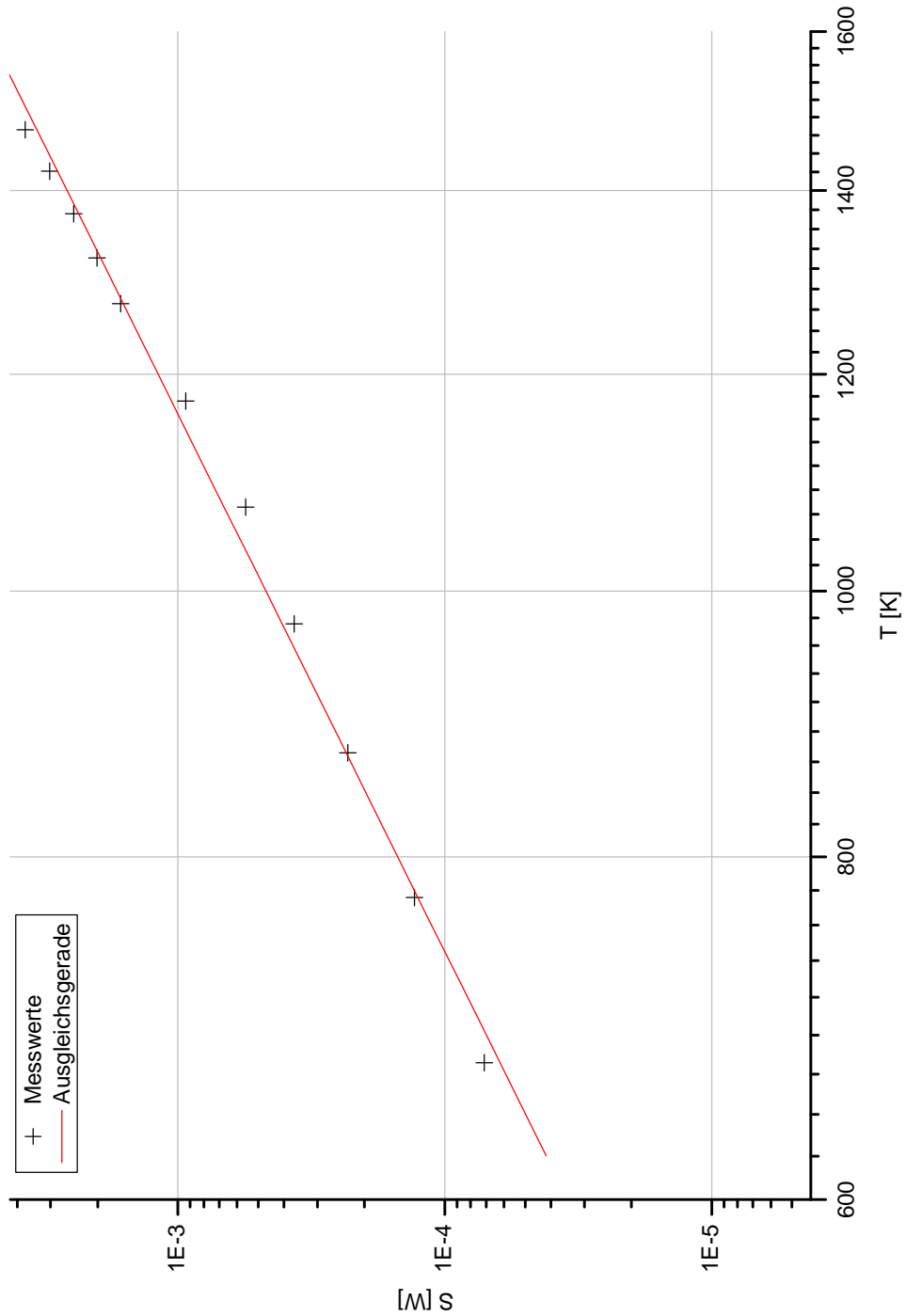


Abbildung 4: Darstellung der Ausgleichsrechnung zur Bestimmung des Exponenten von T

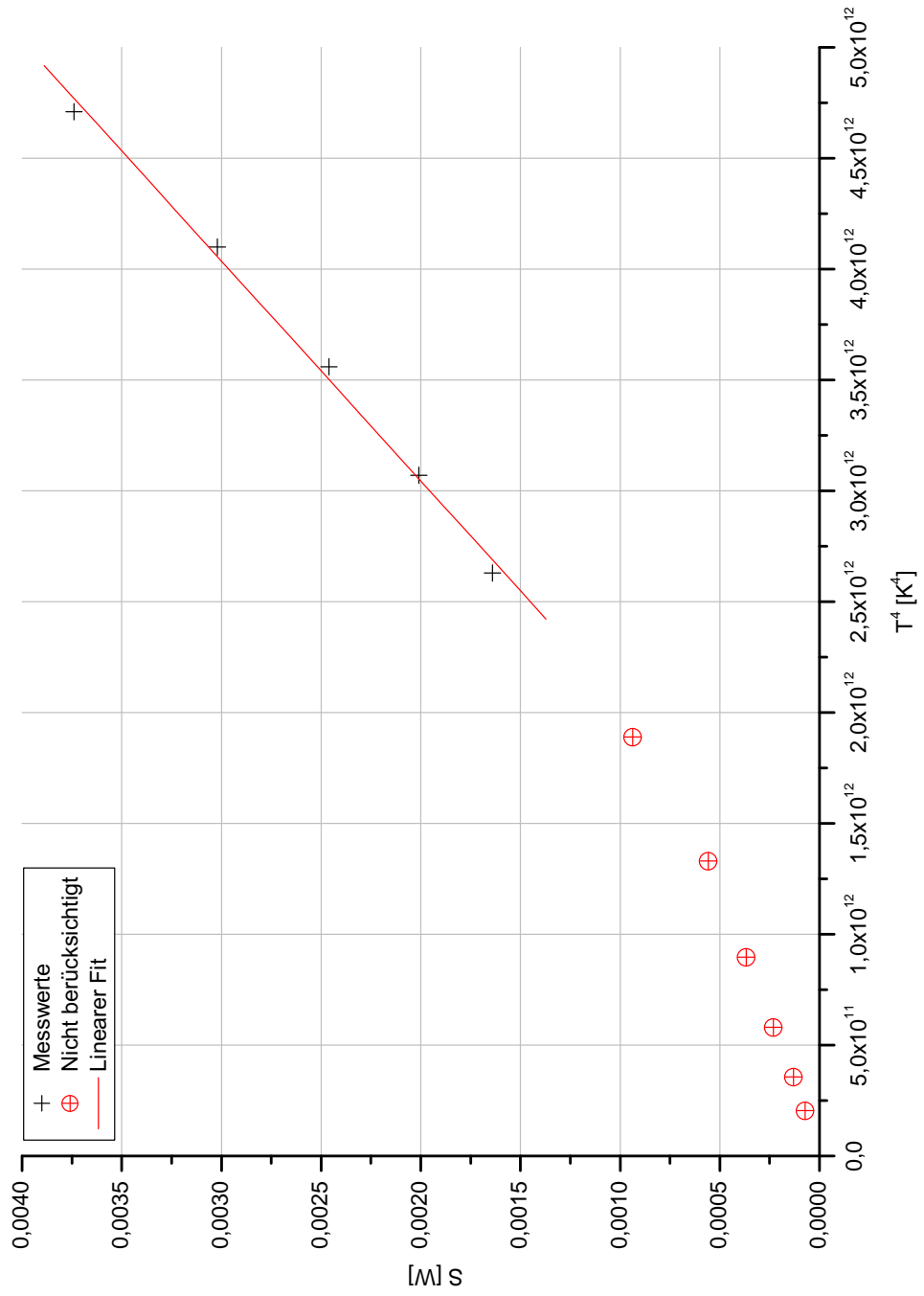


Abbildung 5: Darstellung der Ausgleichsrechnung zur Bestimmung von σ

4.4 Messung der Strahlungsleistung in Abhängigkeit des Abstands

r [m]	U_{th} [μ V]	S [mW]
0.113	1975	11.70
0.123	1672	9.91
0.133	1439	8.53
0.143	1250	7.41
0.153	1096	6.49
0.163	973	5.76
0.173	872	5.17
0.183	783	4.64
0.193	708	4.19
0.203	647	3.83
0.213	588	3.48
0.223	539	3.19
0.233	497	2.94
0.243	458	2.71
0.253	426	2.52
0.263	397	2.35
0.273	372	2.20
0.283	348	2.06
0.333	260	1.54
0.383	203	1.20
0.433	164	0.97
0.483	136	0.81
0.533	114	0.68
0.633	86	0.51
0.733	68	0.40
0.833	55	0.33

Tabelle 3: Darstellung der Messergebnisse bei Variation des Abstands

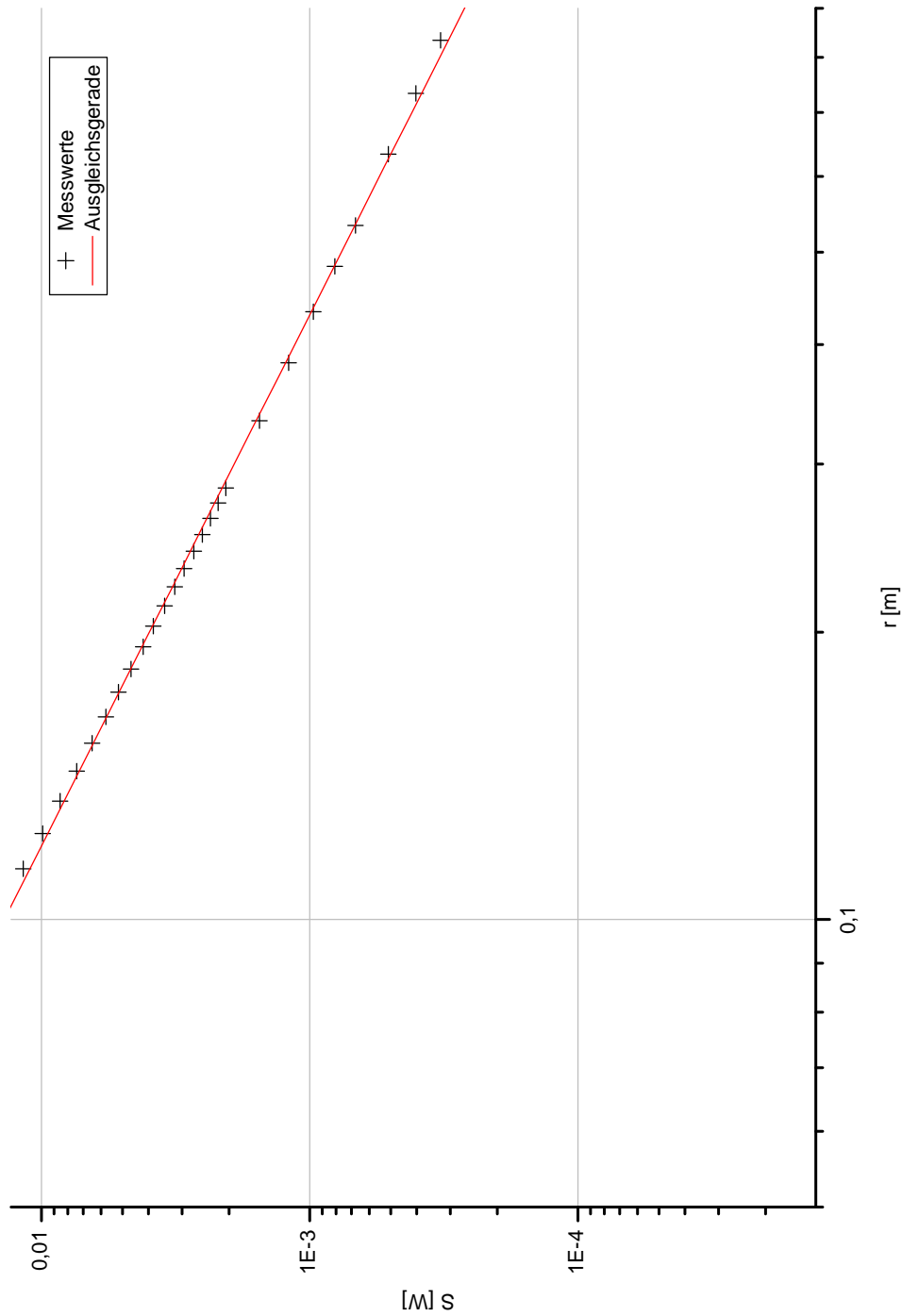


Abbildung 6: Darstellung der Ausgleichsrechnung zur Bestimmung des Exponenten von r

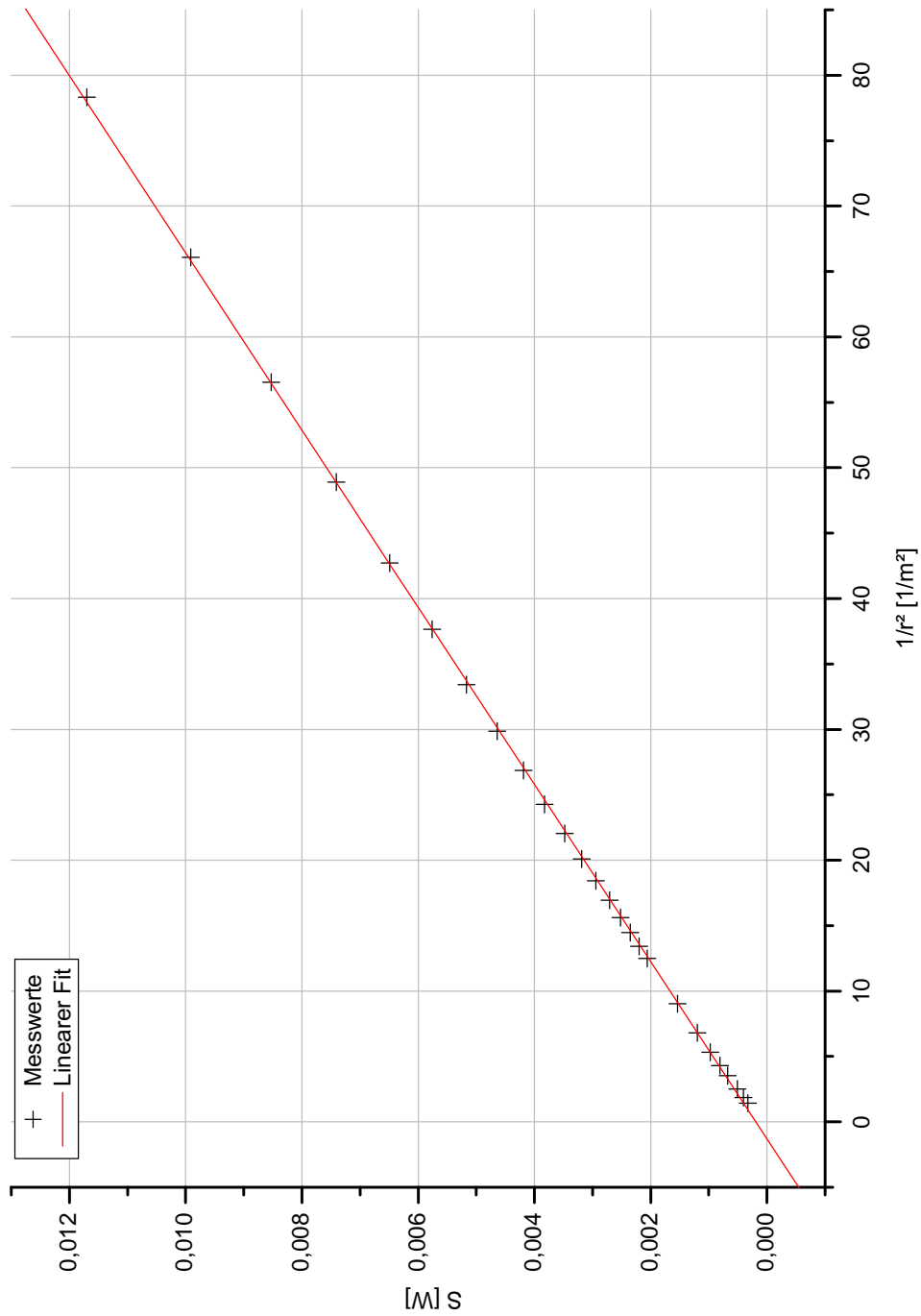


Abbildung 7: Darstellung der Ausgleichsrechnung zur Bestimmung von σ

Der Ablauf ist ähnlich zum vorrangegangenen Versuchsteil. Allerdings wird nun die Temperatur bei $T = const = 1473.15$ K eingestellt aber der Abstand zwischen Emitter und Empfänger variiert. Dies liefert die in Tabelle 3 dargestellten Messwerte. Auch hier wollen wir die Proportionalität zwischen der empfangenen Leistung S und dem Abstand r ermitteln und gehen dabei, wie in Abbildung 6 zu sehen, analog zum vorrangegangenen Teil des Versuchs vor. Wir erhalten für den Exponenten $E = -1.798 \pm 0.011$. Dies ist, im Vergleich zur letzten Messung relativ nah am theoretischen Wert $E_{th} = -2$ (Die Abweichung beträgt etwa 10 %). Auch in diesem Fall soll nun $1/r^2$ gegen die Werte für S aufgetragen werden (Abbildung 7). Die STEFAN-BOLTZMANN-Konstante sollte sich auch hier bis auf einen Vorfaktor aus der Geradensteigung m_r ergeben.

$$\begin{aligned} m_r &= (1.4761 \pm 0.036) \cdot 10^{-4} \text{ Wm}^2 \\ &= 1.4761(1 \pm 0.0024) \cdot 10^{-4} \text{ Wm}^2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \sigma &= (4.434 \pm 0.011) \cdot 10^{-8} \frac{\text{W}}{\text{m}^2\text{K}^4} \\ &= 4.43(1 \pm 0.0024) \cdot 10^{-8} \frac{\text{W}}{\text{m}^2\text{K}^4}. \end{aligned}$$

Hier zeigt sich eine etwas stärkere Abweichung zum Literatur- σ . Sie beträgt ca. 22 %.

4.5 Spektrum der Temperaturstrahlung

λ [μm]	$\Delta\lambda$ [nm]	U_{th} [μV]	P [W/m^3]
1.29	12.7	8	3500
1.45	27.0	6	1320
1.72	64.6	22	2020
1.96	60.0	19	1880
2.16	53.0	33	3690
2.34	116.	38	1940
2.51	63.6	21	1960
2.65	83.8	20	1410
2.90	44.0	11	1480
3.18	65.0	13	1180
3.99	98.0	13	756
5.30	158.	8	300

Tabelle 4: Darstellung der Messergebnisse für bestimmte Frequenzen

Mit Hilfe von speziellen Filtern sollen jeweils nur bestimmte Wellenlängen λ aus dem Spektrum der Temperaturstrahlung gemessen werden. Die Filter haben jeweils einen Durchlassbereich $\Delta\lambda$ der angibt, wie stark benachbarte Wellenlängen durchgelassen werden. Die gemessene Leistung S muss durch dieses $\Delta\lambda$ geteilt werden, um einen Ausgleich dieses Umstands zu erreichen. Die Leistung pro Volumen ergibt sich, nachdem S um den Faktor

$$f = \frac{\pi r^2}{\Delta F_S \Delta F_E} \cdot \frac{1}{2\pi}, \quad (4.6)$$

bereinigt ist und wird in Abbildung 8 gegen die Wellenlänge aufgetragen. Dabei folgt der zusätzliche Faktor $\frac{1}{2\pi}$ aus der Tatsache, dass nun das gesamte Volumen betrachtet wird und nicht nur ein kleiner Ausschnitt. Die Theoriekurve folgt aus der Formel (2.6).

Die Ergebnisse sind in Tabelle 4 und Abbildung 8 dargestellt. Die Theoriekurve wird dabei durch die gemessenen Werte einigermaßen angenähert, wobei die experimentellen Werte zumeist kleiner sind, als die durch die Theorie vorhergesagten.

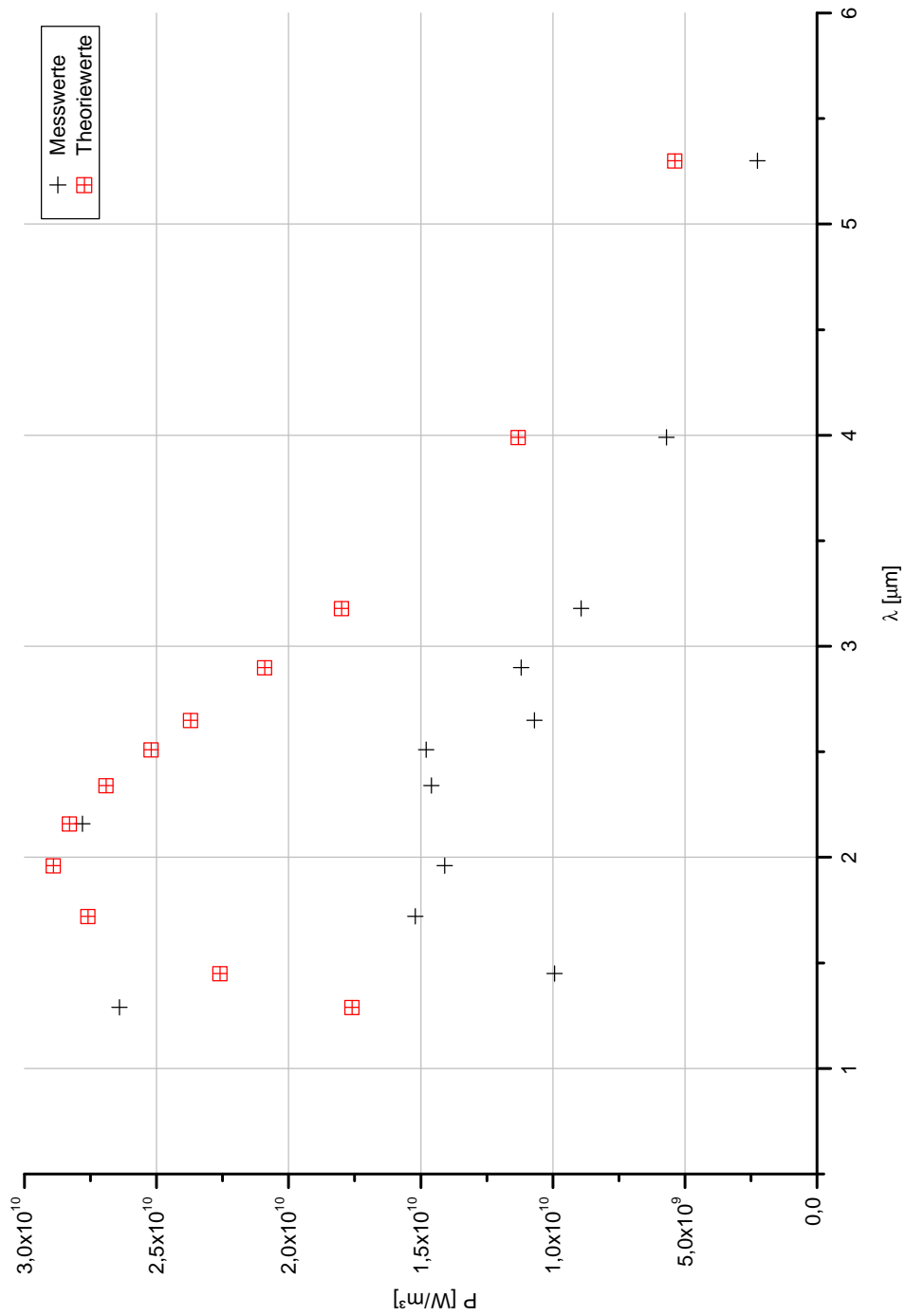


Abbildung 8: Darstellung der spektralen Verteilung der Temperaturstrahlung

5 Diskussion

Die Bestimmung des Eichfaktors verlief im Grunde ohne Probleme und mit vernachlässigbarem statistischen Fehler, so dass die auftretenden weiteren Fehler aus den jeweiligen Messungen stammen müssten.

Bei der Bestimmung der Exponenten, sowohl von T , als auch von r , treten relativ große Abweichungen von den Erwartungen auf. Dies dürfte vor allem dadurch zu erklären sein, dass die Blende an der Thermosäule relativ klein gewählt wurde und somit nur geringe Thermospannungen gemessen werden konnten. Weiterhin ist gerade bei der Messung in Abhängigkeit von T problematisch, dass der benutzte Ofen sich wahrscheinlich nicht gleichmäßig erhitzt und unter Umständen die Messungen ein wenig zu früh getätigt wurden. Die Bestimmung der STEFAN-BOLTZMANN-Konstante aus den beiden Messungen verlief dagegen allerdings erstaunlich gut. Daher kann man auch das Gesetz für die Gesamtstrahlungsleistung als durch dieses Experiment bestätigt ansehen.

Auch die Ergebnisse aus der Messung der Wellenlängenabhängigkeit decken sich weitestgehend mit der Theorie. Zwar sind die meisten gemessenen Werte im Vergleich zum PLANCK'schen Strahlungsgesetz ein gutes Stück zu klein, aber schon aus den Messwerten ist der grobe Umriss der Kurve zu erkennen. Die Ungenauigkeiten können zum Beispiel durch nicht mehr ganz perfekte Filter verursacht worden sein. Aber gerade bei diesem Versuchsteil spielt auch die exakte Ausrichtung der Messapparatur eine entscheidende Rolle. Da sehr kleine U_{th} gemessen wurden, könnte eine leicht ungenaue Ausrichtung erhebliche Fehler in der Messung ausgelöst haben.

Auf eine Bereinigung der Temperaturwerte um die Raumtemperatur wurde verzichtet, da sich im Laufe der Auswertung gezeigt hat, dass die dadurch verursachten Änderungen vernachlässigbar klein sind.

6 Literatur & Bildnachweise

Alle Abbildungen aus Abschnitt 2 und 3 sind aus dem Praktikumsskript entnommen. Werte der physikalischen Konstanten aus www.wikipedia.org am 9. Mai 2006

Temperatur-Strahlung (207) Experimentelle Übungen für Physiker
Version vom 9. Mai 2006

<http://berners-lee.physik.uni-dortmund.de/praktikum/AP-Anleitungen/Waermelehre/Versuch%20Nr.207.pdf>