

Physikalisches Anfängerpraktikum
Universität Dortmund / Fachbereich Physik

Protokoll zu Versuch 401
Das MICHELSON Interferometer
am 25.04.2006

von
Christophe Cauet und Tobias Brambach
Protokoll vom 9. Mai 2006

1 Einleitung

Das MICHELSON Interferometer erlangte seinen Bekanntheitsgrad vor allem durch das MICHELSON-MORLEY Experiment, welches erstmalig 1881 durch ALBERT ABRAHAM MICHELSON in Potsdam und 1887 noch einmal in verbesserter Form zusammen mit EDWARD MORLEY in Cleveland durchgeführt wurde. Ziel des Experiments war es, die Existenz des **Äthers**, eines Mediums in dem sich Lichtwellen ausbreiten, durch **Interferenzeffekte** nachzuweisen. Dieses Ziel konnte nicht erreicht werden und erst mit dem Aufkommen der Relativitätstheorie, die keinen solchen Äther mehr voraussetzt, konnte das Experiment verstanden werden.

Im vorliegenden Experiment wird das Interferometer benutzt um Wellenlängen von Licht mit Hilfe von Interferenz zu bestimmen. Außerdem kann mit diesem Gerät auch die **optische Dichte** von Materialien untersucht werden.

2 Theorie

2.1 Interferenz, Kohärenz und Kohärenzlänge

Als Interferenz bezeichnet man das Phänomen, der Überlagerung zweier oder mehrerer Wellen. Dabei spricht man von **konstruktiver Interferenz**, wenn sich Wellen an einem Beobachtungspunkt so überlagern, dass sich ihre Amplituden addieren, sie also in gleicher Phase sind. Dagegen bezeichnet man den Effekt der Auslöschung von Wellen die sich genau gegenphasig verhalten als **destruktive Interferenz**. Wenn die interferierenden Wellen mit der Wellenlänge λ an einem gemeinsamen Ortspunkt erzeugt wurden und dann auf unterschiedlichen Wegen zum Beobachtungspunkt gelangen, beträgt der **Gangunterschied** zwischen den beiden Wegen genau $n \cdot \lambda$ für konstruktive Interferenz und $(n + \frac{1}{2}) \cdot \lambda$ für destruktive Interferenz. Um überhaupt eine solche feste Phasenbeziehung erhalten zu können, benötigt man natürlich **monochromatische** Wellen also Wellen mit gleicher Frequenz. Man spricht dann von **kohärenten** Wellen, wenn eben diese feste Phasenbeziehung der einzelnen Teilwellen vorliegt.

Der Begriff der Kohärenz spielt gerade bei Licht eine große Rolle, da ja ein Lichtbündel nicht aus einer einzelnen Welle besteht sondern aus vielen Lichtquanten den sogenannten **Photonen**. Photonen werden in den meisten Lichtquellen in statistischen Effekten, also nach einem zufälligen Muster erzeugt. Daher ist es also keineswegs selbstverständlich, dass eine Lichtquelle kohärentes Licht erzeugt. Eine Möglichkeit einer geeigneten Lichtquelle ist ein **LASER** (Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation). In Lasern werden Elektronen zu gleichförmigen Schwingungen

angeregt. Dadurch ist nicht mehr ein statistischer Prozess für die Lichterzeugung verantwortlich, sondern ein geregelter periodischer.

Durch geeignete optische Konstruktionen kann jedoch auch mit „herkömmlichen“ Lichtquellen interferenzfähiges Licht erzeugt werden, so dass die Lichtwellen bei begrenztem Gangunterschied quasi kohärent sind. In diesem Falle sind die Minima nicht exakt null und die Maxima entsprechen nicht genau der Summe der Amplituden. An dieser Stelle ist auch der Begriff der **Kohärenzlänge** von Bedeutung. Er sagt aus, wie hoch der Gangunterschied zwischen zwei Lichtbündeln sein darf, damit noch Interferenzerscheinungen zu beobachten sind. Um dies zu verdeutlichen, kann man sich eine punktförmige Lichtquelle (z.B. ein angeregtes Atom) vorstellen, dessen Licht, gemäß Abbildung 1 in zwei Lichtbündel aufgeteilt wird. Wenn nun durch eine Umlenkung beide Bündel auf die selbe Stelle eines Schirms gelenkt werden können dort, bei verschiedenen Weglängen, Interferenzerscheinungen beobachtet werden. Da aber der Emissionsakt nur eine endliche Zeit t dauert und somit auch die emittierte Welle nur eine endliche Länge hat, verschwinden die Interferenzerscheinungen, wenn der Gangunterschied Δ größer ist als die Länge des Wellenzuges $c \cdot t$. Dann nämlich überlagern sich nur noch Wellen, die aus zeitlich verschiedenen Emissionsakten stammen und keine konstante Phasenbeziehung untereinander besitzen. Quantitativ kann die Kohärenzlänge ℓ dadurch bestimmt werden, dass man die Anzahl N der maximal in P beobachtbaren Intensitätsmaxima ermittelt und sie mit der Wellenlänge multipliziert:

$$\ell = N\lambda. \tag{2.1}$$

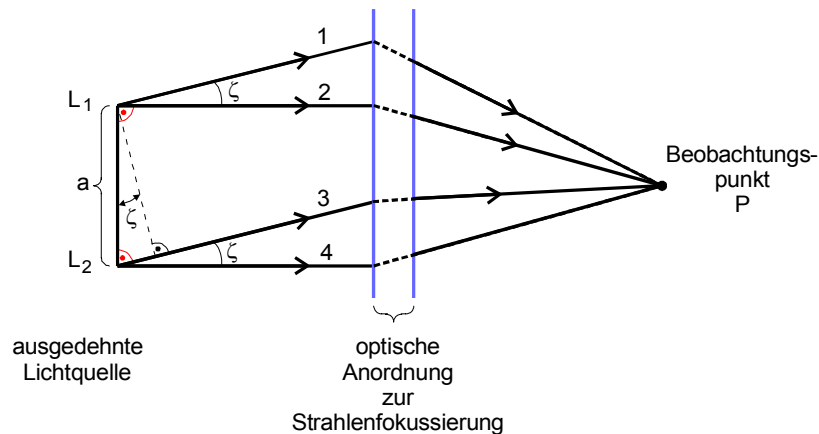


Abbildung 1: Skizze zur Verdeutlichung des Begriffs der Kohärenzlänge

2.2 Schwebungen

Wenn sich zwei Wellen mit leicht unterschiedlichen Winkelfrequenzen ω überlagern, dann entstehen sogenannte Schwebungen. Das heißt, die superponierte Schwingung besteht aus einer Grundschiwingung und einer zweiten daran multiplizierten Schwingung die die Amplitude periodisch größer und kleiner werden lässt. Mathematisch folgt dies aus der Überlagerung zweier ebener Wellen

$$U(x, t) = U_0(\cos(k_1x - \omega_1t) + \cos(k_2x - \omega_2t)) \quad (2.2)$$

Mit dem Additionstheorem folgt dann

$$U(x, t) = 2 \cos\left(\frac{(\omega_1 + \omega_2)t - (k_1 + k_2)x}{2}\right) \cos\left(\frac{(\omega_1 - \omega_2)t - (k_1 - k_2)x}{2}\right) \quad (2.3)$$

$$= 2 \cos\left(\frac{(\omega_1 + \omega_2)t - (k_1 + k_2)x}{2}\right) \cos\left(\frac{\Delta\omega t - (k_1 - k_2)x}{2}\right) \quad (2.4)$$

Mit $\Delta\omega = \omega_1 - \omega_2$. Damit ist dann

$$A = \cos\left(\frac{\Delta\omega t - (k_1 - k_2)x}{2}\right) \quad (2.5)$$

die Amplitude der Schwebung mit der Frequenz $\Delta\omega$.

3 Durchführung

3.1 Aufbau des Interferometers

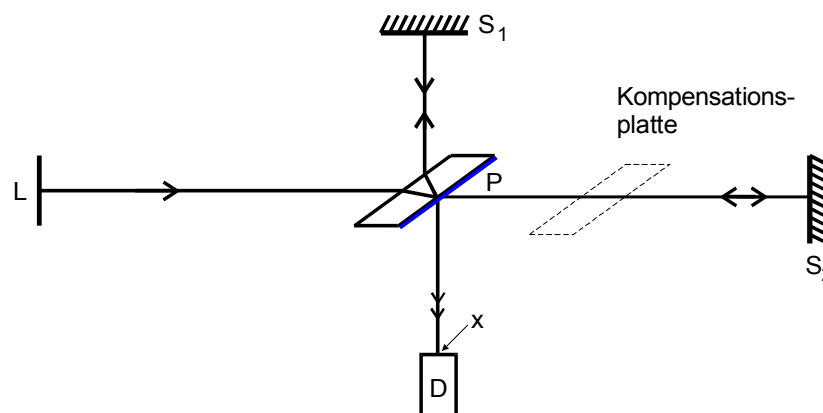


Abbildung 2: Schematischer Aufbau des Michelson-Interferometers

Der prinzipielle Aufbau des MICHELSON-Interferometers ist in Abbildung 2 zu se-

hen. Kernstück des Gerätes ist der semipermeable Spiegel P im Zentrum, der das von der Lichtquelle L ausgehende Licht in zwei Lichtbündel aufteilt. Die beiden Lichtbündel werden anschließend an den Spiegeln S_1 oder S_2 reflektiert und danach beim zweiten Durchlauf durch P wieder zusammengeführt. Die Apparatur muss so justiert werden, dass beide Bündel möglichst am gleichen Punkt in D wieder auftreffen. Zwischen P und S_2 befindet sich zusätzlich eine sogenannte Kompensationsplatte. Diese ist erforderlich, da die Reflexion in P auf der rechten Seite (Abbildung 2) stattfindet. Dadurch durchläuft der Strahl nach S_1 das optisch dichtere Medium in P zweimal mehr als der Strahl nach S_2 . Dies wird durch die zusätzliche Platte auf dem Weg zwischen P und S_2 ausgeglichen.

Wenn nun der Weg $\overline{PS_1} = \overline{PS_2} + n\lambda$ (mit $n \in \mathbb{Z}$ und λ als Wellenlänge des einfallenden Lichts) ist, dann sollte am Detektor D konstruktive Interferenz zu beobachten sein. Für $\overline{PS_1} = \overline{PS_2} + (2n + 1)\frac{\lambda}{4}$ kommen Maxima von S_1 gleichzeitig mit Minima von S_2 bei D an, d.h. es tritt destruktive Interferenz auf.

3.2 Messung von Wellenlängen

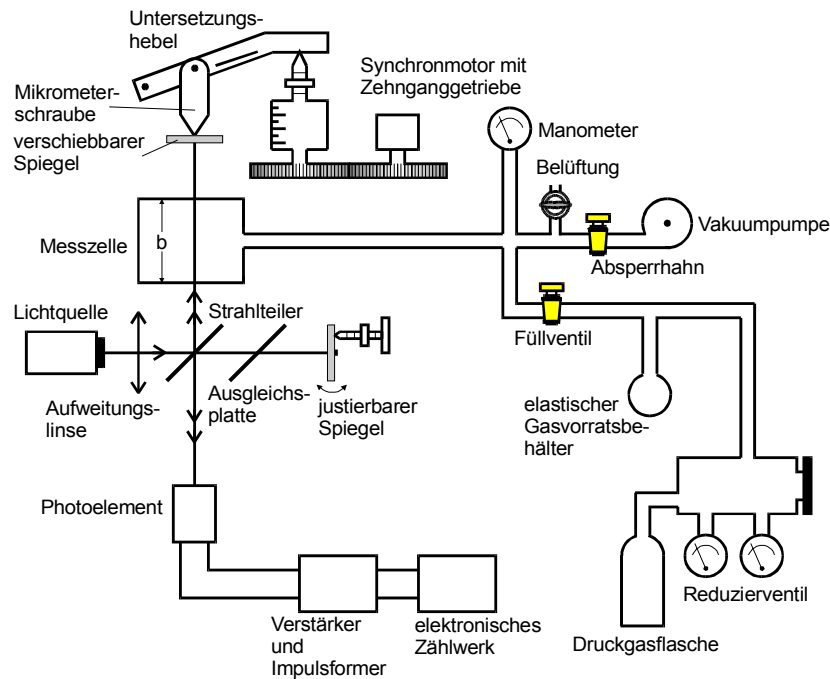


Abbildung 3: Darstellung der verwendeten Messapparatur

Zunächst soll die Wellenlänge von Licht eines roten Lasers bestimmt werden. Dazu wird die Apparatur wie im vorherigen Kapitel beschrieben verwendet. Das Laserlicht läuft allerdings nach seiner Erzeugung noch durch eine Linse, so dass der Strahl aufgefächert wird. Dies hat zur Folge, dass bei P dann nicht einfach nur ein pulsierender

Punkt zu sehen ist, sondern ein Gebilde aus hellen und dunklen Ringen. Wenn nun der Spiegel S_1 („verschiebbarer Spiegel“ in Abbildung 3) bewegt wird, scheinen die **Interferenzringe** aus ihrem Zentrum herauszuquillen, bzw. in ihm zu verschwinden, je nach Bewegungsrichtung des Spiegels. Ein Photoelement mit angeschlossenem elektronischen Zählwerk misst dann die Anzahl der Impulse. Der verschiebbare Spiegel wird mit Hilfe eines Synchronmotors über eine Mikrometerschraube und eine Hebeluntersetzung bewegt. Es kann also nun eine Messung der Anzahl m der auftretenden Maxima in Abhängigkeit der Wegänderung Δx erstellt werden. Da man bei einer Spiegelverschiebung um $\Delta x = \frac{\lambda}{2}$ genau von einem zum nächsten Maximum kommt, ergibt sich dann die Wellenlänge λ aus

$$\lambda = \frac{2\Delta x}{m}, \quad (3.1)$$

wobei sich Δx aus dem Quotienten der gemessenen Wegstrecke Δr und einem Untersetzungsfaktor U ergibt.

Mit einer Lichtquelle die nichtkohärentes Licht ausstrahlt, muss die Messung leicht modifiziert werden. Zunächst wird mit Hilfe des Lasers die Apparatur exakt eingestellt, so dass das Bild in D nur noch einen flackernden Punkt zeigt. Die Aufweitungslinse wird vom Eingang der Apparatur entfernt, da die verwendete Natriumdampflampe von sich aus Licht in alle Richtungen aussendet. Stattdessen wird zwischen P und D eine Linse aufgestellt, so dass D direkt im Brennpunkt der Linse steht. Wenn das Interferometer richtig eingestellt ist, sind nun auch die Interferenzringe der Natriumlampe zu sehen. Allerdings aufgrund der nicht perfekten Kohärenz nur mit deutlich schwächer ausgeprägten Extrema. Die Messung der Wellenlänge erfolgt dann analog zu der bei Laserlicht.

3.3 Messung von Wellenlängenunterschieden

Eine Natriumdampflampe sendet Licht mit diskretem Frequenzspektrum aus (dies ist natürlich auch schon eine Voraussetzung für die vorrangegangene Messung der Wellenlänge). Die gemessene Wellenlänge ihres gelben Lichts ist allerdings nur ein Mittelwert aus den beiden Wellenlängen sogenannter **Dublettlinien**, zweier Spektrallinien des Natriums die sehr dicht beieinander liegen. Ihren Abstand kann man bestimmen, indem man mit Hilfe eines Speicherszilioskops das Signal des Photoelements aufnimmt, während der Spiegel bewegt wird. Man erkennt, dass sich die Amplitude der Lichtintensität sinusförmig ändert. Diese Änderung folgt aus (2.5) und rührt daher, dass sich hier zwei Wellen mit ähnlichen Frequenzen in einer Schwebung überlagern.

Auf dem Oszillographenplot kann man die Schwebungsperiode τ , also den Abstand zwischen zwei Nulldurchläufen ablesen. Da aber in (2.5) ein Cosinus auftritt, muss die Periodendauer 2τ betragen, da eine Periode des Cosinus immer zwei Nulldurchläufe beinhaltet. Aus der Messung der Geschwindigkeit u des Motors, kann der zurückgelegte Weg Δx mit $\Delta x = 2\tau u$ berechnet werden. Daraus kann mit der Beziehung $\Delta\nu = \frac{c}{\Delta x}$ (c ist die Lichtgeschwindigkeit) die Frequenzdifferenz der beiden beteiligten Schwingungen ermittelt werden.

Aus der schon ermittelten Wellenlänge des Natriumlichts λ_0 kann man nun $\nu_0 = \frac{c}{\lambda_0}$ berechnen. Die Differenz $\Delta\lambda$ der Wellenlängen der beiden Doublettlinien folgt damit aus

$$\Delta\lambda = \lambda_0 - \frac{c}{\nu_0 + \Delta\nu} \quad (3.2)$$

3.4 Messung der optischen Dichte von Gasen

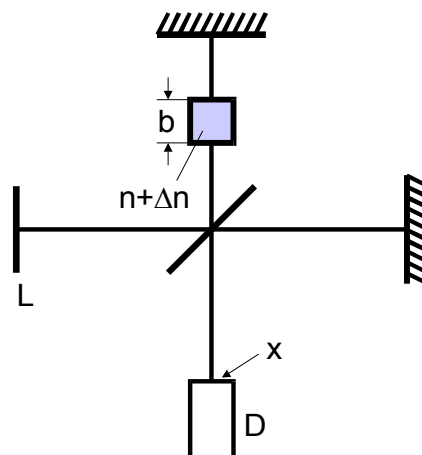


Abbildung 4: Schematische Darstellung des Versuchsaufbaus zur Messung des Brechungsindex von Gasen

Gemäß Abbildung 4 befindet sich zwischen P und S_1 eine Kammer der Länge b die mit Gas gefüllt, aber auch evakuiert werden kann. Durch Änderung des Drucks (und damit der optischen Dichte des Materials) in der Kammer, wird eine optische Wegänderung verursacht. Dadurch kann mit dem Versuchsaufbau aus dem ersten Teil wieder die Anzahl m der Interferenzringe von Laserlicht bei einer Druckänderung von p nach p' bestimmt werden. Daraus kann mit der Beziehung

$$\Delta n = \frac{m\lambda}{2b} \quad (3.3)$$

die Differenz der optischen Dichte bei Änderung des Drucks von p nach p' , $\Delta n(p, p')$, ermittelt werden. Unter der Voraussetzung, dass bei einem Druck $0 \text{ bar} \geq p \geq$

1bar das untersuchte Gas als ideales Gas zu betrachten ist, erhält man

$$n(p_0, T_0) = 1 + \Delta n(p, p') \frac{T}{T_0} \frac{p_0}{p - p'} \quad (3.4)$$

für eine Messung bei der Temperatur T . $T_0 = 273.15\text{K}$ und $p_0 = 1.0132\text{bar}$ bezeichnen die **Normalbedingungen**. Brechungsindizes von Gasen werden üblicherweise für diese Bedingungen angegeben.

4 Auswertung

Im folgenden Abschnitt werden immer wieder Rechnungen für die Fehlerrechnung benötigt. Um das Lesen des Textes einfacher zu gestalten, sollen jetzt die wichtigsten Formeln kurz dargestellt werden. Der **Mittelwert**:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad (4.1)$$

Der Mittelwert ist ein Näherungswert für den wahren Wert einer Messreihe aus n Einzelmessungen x_i . Der Mittelwert wird in weiteren Schritten als „wahrer“ Wert der gemessenen Größe verwendet. Er ist jedoch fehlerbehaftet. Der **mittlere Fehler des Mittelwertes**:

$$\bar{\sigma}_n = \sqrt{\sum_{i=1}^n \frac{(x_i - \bar{x})^2}{n(n-1)}} \quad (4.2)$$

gibt eben diesen Fehler der Näherung an. Stellt man fest, dass der Fehler einer Größe mit anderen fehlerbehafteten Größen korreliert, so muss diese Einflussnahme mit Hilfe einer **Fehlerfortpflanzung** berechnet werden. Für ein Produkt a von fehlerbehafteten Größen x und y mit den Fehlern r_x, r_y gilt:

$$\begin{aligned} a &= x^m y^n \\ r_a &= \sqrt{m^2 r_x^2 + n^2 r_y^2} \end{aligned} \quad (4.3)$$

Durch diese einfache Summierung der Fehlerquadrate der einzelnen Messgrößen (r_i) kann schnell der resultierende Fehler bestimmt werden. Der Fehler r ist ein **relativer Fehler**. Er berechnet sich aus

$$r = \frac{\bar{\sigma}_n}{\bar{x}} \quad (4.4)$$

4.1 Bestimmung der Wellenlänge eines Lasers

Zur Messung der Wellenlänge des Lasers wird das Interferometer so eingestellt, dass bei eingeschaltetem Synchronmotor auf dem Photoelement konzentrische Interferenzringe zu erkennen sind. Die Messung der Wellenlängen mit der in der Theorie beschriebenen Methode liefert die in Tabelle 1 aufgeführten Werte.

Start [mm]	Ende [mm]	Differenz Δs [mm]	Impulse α	Wellenlänge [mm]
2.00	6.82	4.82	2998	637.23
1.95	6.82	4.87	3018	639.58
2.00	6.86	4.86	3002	641.66
2.02	6.86	4.84	3002	639.37

Tabelle 1: Messwerte zur Wellenlängenmessung

Die Wellenlänge berechnet sich dann über $\lambda = \frac{2\Delta s}{\alpha\Psi}$, mit der Hebeluntersetzung $\Psi = 5.046$ am Motor. Es ergibt sich dann über die Formeln (4.1) und (4.3) der Mittelwert auf die Wellenlänge zu:

$$\begin{aligned}\lambda &= (639.37 \pm 0.91)\text{nm} \\ &= 639.37(1 \pm 0.0014)\text{nm}\end{aligned}$$

4.2 Messung des Brechungsindex von Luft und CO_2

Die Messung fand bei einer Temperatur von $T = 298.15\text{K}$ statt. Die Normalbedingungen sind definiert als $T_0 = 273.15\text{K}$ und $p_0 = 1013.2\text{mbar}$. Tabelle 2 zeigt die für Luft gemessenen Werte. Aus den Einzelmessungen wird jeweils ein Wert für Δn und für jede Einzelmessung wird dann mit (3.4) ein zugehöriger Wert für $n(T_0, p_0)$ berechnet. Mittelwertbildung liefert

$$n_{\text{Luft}} = (1.0002937 \pm 0.0000024)$$

Startdruck p' [bar]	Enddruck p [bar]	Druckdifferenz Δp [bar]	Impulse α
0.005	1.000	0.995	43
0.005	1.000	0.995	41
0.005	1.000	0.995	41
0.005	1.000	0.995	41
0.005	1.000	0.995	41
0.005	1.000	0.995	41

Tabelle 2: Messwerte zur Bestimmung des Brechungsindex von Luft

Die Berechnung des Brechungsindex n_{CO_2} verläuft nun äquivalent zu der von Luft. Die Messwerte finden sich in Tabelle 3. Sowohl die Normalbedingungen als auch die bei der Messung vorherrschende Temperatur haben sich nicht verändert. Mit (3.4)

und der Fehlerfortpflanzung nach (4.3) erhält man:

$$n_{\text{CO}_2} = (1.0004692 \pm 0.0000078)$$

Startdruck p' [bar]	Enddruck p [bar]	Druckdifferenz Δp [bar]	Impulse α
0.005	0.955	0.990	67
0.005	0.935	0.930	62
0.005	0.935	0.930	61
0.005	0.930	0.925	63
0.005	0.940	0.935	59
0.005	0.940	0.935	60

Tabelle 3: Messwerte zur Bestimmung des Brechungsindex von Kohlendioxid

4.3 Bestimmung der Wellenlänge des Lichts einer Natriumdampflampe

Die Bestimmung der Wellenlänge des Lichts der verwendeten Lampe erfolgt analog zur Berechnung der Wellenlänge des Laserlichts. Die Messwerte und Ergebnisse sind in Tabelle 4 aufgeführt.

Differenz Δs [mm]	Impulse α	Wellenlänge λ_0 [mm]
0.50	336	589.81
0.50	332	596.92
0.50	343	577.77
0.50	332	596.92
0.50	331	598.72
0.50	340	582.87
0.50	323	613.55
0.50	340	582.87
	Mittelwert	592.43
	abs. Fehler	32.61
	rel. Fehler	5.50%

Tabelle 4: Messwerte zur Bestimmung der Wellenlängendifferenz zweier Dublettlinien

4.4 Bestimmung der Wellenlängendifferenz zweier Dublettlinien

Zur Bestimmung des Abstands der Dublettlinien wird das Detektorsignal mit einem Speicheroszilloskop aufgezeichnet. Der zugehörige Plot befindet sich im Anhang. Es wird jetzt die Geschwindigkeit u des Synchronmotors gemessen. Nach $t = (300 \pm 1)\text{s}$ kann genau eine Differenz von $\Delta x = (5 \pm 0.01)\text{mm}$ auf der Mikrometerschraube abgelesen werden. Unter Berücksichtigung der Untersetzung und der Tatsache, dass das Licht auf Hin- und Rückweg Δx je einmal durchlaufen wird, erhält man nun:

$$\begin{aligned}u &= (6.606 \pm 0.026) \cdot 10^{-6} \frac{\text{m}}{\text{s}} \\ &= 6.606(1 \pm 0.0039) \cdot 10^{-6} \frac{\text{m}}{\text{s}}\end{aligned}$$

Die Wellenlänge λ_s lässt sich jetzt als das Produkt aus Geschwindigkeit und Periodendauer $\tau = (90.2 \pm 4.51)\text{s}$ der Schwebung darstellen:

$$\begin{aligned}\lambda_s &= \tau u \\ &= (0.000596 \pm 0.000030) \text{ m} \\ &= 0.000596(1 \pm 0.052) \text{ m}\end{aligned}$$

Über $\Delta\nu = \frac{c}{\lambda_s} = (5.031 \pm 0.252) \cdot 10^{11} \text{ s}^{-1}$ erhalten wir wegen (2.5) die Frequenzdifferenz der an der Schwebung beteiligten Grundfrequenzen. Mit der gemessenen Wellenlänge λ_0 und der daraus zu errechnenden Frequenz $\nu_0 = \frac{c}{\lambda_0}$ können wir nun die Wellenlängendifferenz der Dublettlinien ausdrücken:

$$\begin{aligned}\Delta\lambda &= \lambda_0 - \frac{c}{\nu_0 + \Delta\nu} \\ &= 0.589 \cdot 10^{-9} \text{ nm}\end{aligned} \tag{4.5}$$

Mit der Näherung $\Delta\lambda = \frac{\lambda_0^2}{\Delta x}$ können wir $\Delta\lambda$ identisch berechnen. Die Fehlerrechnung ist hiermit einfacher, es ergibt sich mit GAUSS'scher Fehlerfortpflanzung (4.3):

$$\begin{aligned}\Delta\lambda &= (0.589 \pm 0.044) \cdot 10^{-9} \text{ nm} \\ &= 0.589(1 \pm 0.0745) \cdot 10^{-9} \text{ nm}\end{aligned}$$

5 Diskussion

Die Berechnung der Wellenlänge des Lasers erfolgt ohne Schwierigkeiten und mit einem akzeptablen Fehler. Die Messungen zur Bestimmung des Brechungsindex sind ebenfalls nur mit einem äußerst geringen Fehler behaftet. Dies kommt daher, dass eigentlich die Differenz der Brechungsindizes zu 1 mit Fehlern von ca. 1% gemessen wurde. Bei der Addition des Wertes 1 um auf den realen Brechungsindex zu kommen blieb dann natürlich der absolute Fehler konstant, wodurch die Fehler relativ zum Brechungsindex nahezu verschwanden.

Die Messung der Wellenlänge der Natriumdampfampe ist nicht so exakt gelungen wie bei dem Laser. Dies kann daran liegen, dass durch die entstandene Schwebung die Amplitude zeitweise so schwach gewesen ist, dass einzelne Extrema nicht mehr aufgelöst werden konnten. Die Bestimmung der Wellenlängendifferenz der beiden Dublettlinien im Natriumspektrum entspricht in guter Näherung den Erwartungen. Der Fehler ist auf die hohe Ungenauigkeit beim Ablesen des Oszillatorplot und auf den hohen Fehler auf die gemittelte Wellenlänge zurückzuführen.

6 Literatur & Bildnachweise

Sämtliche Abbildungen in den Abschnitten 2 und 3 sind aus dem Praktikumsskript entnommen.

Das MICHELSON Interferometer (401)

Experimentelle Übungen für Physiker, Version vom 9. Mai 2006

<http://berners-lee.physik.uni-dortmund.de/praktikum/AP-Anleitungen/Optik/Versuch\%20Nr.401.pdf>