

Physikalisches Anfängerpraktikum
Universität Dortmund / Fachbereich Physik

Protokoll zu Versuch 606
Suszeptibilität paramagnetischer Substanzen
am 17.01.2006

von
Christophe Cauet und Tobias Brambach
Protokoll vom 22. Januar 2006

1 Einleitung

Es soll in diesem Versuch die magnetische Eigenschaft der **Suszeptibilität** von paramagnetischen Substanzen bestimmt werden. Wir untersuchen die stark paramagnetischen Ionen Seltener Erden und wollen die durch die Theorie vorhergesagte Suszeptibilität mit den experimentell bestimmten Daten vergleichen.

2 Theorie

2.1 Die Suszeptibilität paramagnetischer Substanzen

Die magnetische Flussdichte \vec{B} hängt im Vakuum über die Induktionskonstante μ_0 mit der magnetischen Feldstärke \vec{H} zusammen:

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$$

Diese Gesetzmäßigkeit muss bei Anwesenheit von Materie um die Magnetisierung \vec{M} ergänzt werden. Sie beschreibt die atomaren magnetischen Momente in der Materie und hängt vom mittleren magnetischen Moment und der Anzahl der Momente pro Volumeneinheit ab.

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \vec{M}$$

Die Magnetisierung steht in Abhängigkeit zur magnetischen Feldstärke und kann durch

$$\vec{M} = \mu_0 \chi \vec{H} \tag{2.1}$$

beschrieben werden. Der in (2.1) auftretende Faktor χ wird als **Suszeptibilität** bezeichnet. Es sei darauf hingewiesen, dass es sich hierbei um eine Funktion von \vec{H} , als auch von der Temperatur T handelt. Anders als der grundsätzlich vorhandene **Diamagnetismus** ($\chi < 0$), ist der **Paramagnetismus** nur bei Atomen, Ionen oder Molekülen zu beobachten, die einen effektiven Drehimpuls besitzen. Durch eine Orientierung, der an den Drehimpuls gekoppelten magnetischen Momente, relativ zu einem äußeren Feld, entsteht der stark temperaturabhängige Paramagnetismus. Zum tieferen Verständnis der Vorgänge soll jetzt der Zusammenhang zwischen atomarem Drehimpuls und dem magnetischem Moment hergestellt werden. Über die sogenann-

te LS -Kopplung

$$\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$$

lässt sich der Gesamtdrehimpuls der Elektronenhülle \vec{J} durch den Gesamtbahndrehimpuls $\vec{L} = \sum \vec{\ell}_i$ und dem Gesamtspin $\vec{S} = \sum \vec{s}_i$ darstellen. Die entsprechenden magnetischen Momente zu den Drehimpulsen \vec{L} und \vec{S} lauten:

$$\vec{\mu}_L = -\frac{\mu_B}{\hbar} \vec{L}$$
$$\vec{\mu}_S = -g_S \frac{\mu_B}{\hbar} \vec{S}$$

($h = \text{PLANCK'sches Wirkungsquantum}$, $\hbar = h/2\pi$, e_0 , m_0 Ladung bzw. Ruhemasse des Elektrons)

Bei der Größe μ_B handelt es sich um das sogenannte **BOHR'sche Magneton**, in g_S findet sich das **gyromagnetische Verhältnis des freien Elektrons** wieder. Die Quantenmechanik liefert jetzt für die Größen $|\vec{L}|$, $|\vec{S}|$ und $|\vec{J}|$ die folgenden Ausdrücke:

$$|\vec{L}| = \sqrt{L(L+1)}\hbar$$
$$|\vec{S}| = \sqrt{S(S+1)}\hbar$$
$$|\vec{J}| = \sqrt{J(J+1)}\hbar$$

Es handelt sich bei den Beträgen um die Bahndrehimpulsquantenzahl L des Atoms, die Spinquantenzahl S des Atoms und die Gesamtdrehimpulsquantenzahl J . Jetzt spielen neben diesen grundlegenden Größen noch weitere quantenmechanisch begründete Faktoren in die weitere Rechnung mit ein. Auf die sogenannte **Richtungsquantelung** als auch auf den **ZEEMAN-Effekt** soll an dieser Stelle nicht weiter eingegangen werden. Die zugrundeliegende Quantenmechanik liefert jedoch das bekannte **CURIE'sche Gesetz** des Paramagnetismus:

$$\chi \propto \frac{1}{T}, \tag{2.2}$$

welches für hinreichend hohe Temperaturen direkt aus

$$\chi = \frac{\mu_0 \mu_B^2 g_J^2 N J(J+1)}{3kT} \tag{2.3}$$

folgt.

2.2 Berechnung der Suszeptibilität Seltener-Erd Verbindungen

Der starke Paramagnetismus der Ionen Seltener Erden wird von den *inneren* Elektronen, genauer von den $4f$ -Elektronen erzeugt. Diese kommen erst ab dem Element Cer ($z = 58$) in steigender Anzahl in der Elektronenhülle vor. Da die $4f$ -Elektronen weit innerhalb der $6s$ -Schale liegen, sind auch die Ionen der Seltenen Erden stark paramagnetisch. Die Anordnung der Elektronen wird durch die **HUND'schen Regeln** festgelegt:

- Die Spins \vec{s}_i kombinieren zum maximalen Gesamtspin $\vec{S} = \sum \vec{s}_i$, der nach dem PAULI¹-Prinzip möglich ist.
- Die Bahndrehimpulse $\vec{\ell}_i$ setzen sich so zusammen, dass der maximale Drehimpuls $\vec{L} = \sum \vec{\ell}_i$, der mit dem PAULI-Prinzip und der Regel 1 konform ist, entsteht.
- Der Gesamtdrehimpuls ist $\vec{J} = \vec{L} - \vec{S}$, wenn die Schale weniger als halb und $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$, wenn die Schale mehr als halb gefüllt ist.

Die Regeln sind notwendig, um die Suszeptibilität nach Formel (2.3) zu berechnen. Hierzu müssen der Drehimpuls \vec{J} und der sogenannte **LANDÉ-Faktor**

$$g_J := \frac{3J(J+1) + [S(S+1) - L(L+1)]}{2J(J+1)} \quad (2.4)$$

bestimmt werden.

3 Durchführung

3.1 Apparatur zur Messung der Suszeptibilität

Prinzipiell sollte es möglich sein, durch eine Induktivitätsmessung einer Spule die Suszeptibilität einer Probe zu bestimmen. Die Induktivität einer langen Zylinderspule im Vakuum beträgt

$$L = \mu_0 \frac{n^2}{l} F, \quad (3.1)$$

¹Das PAULI-Prinzip sagt aus, dass jedes Elektron in einer Hülle sich in mind. einer seiner Quantenzahlen von seinen Nachbarn unterscheiden muss.

wobei F den Querschnitt einer Spule der Länge l und der Windungszahl n beschreibt. Eine Spule deren Inneres jedoch vollständig mit Materie gefüllt ist, lässt sich durch

$$L_{M_{total}} = \mu\mu_0 \frac{n^2}{l} F$$

beschreiben. Technische Hindernisse erfordern es, dass diese Formel noch angepasst wird, da beispielsweise das Innere der Spule meist nicht vollständig mit der Probe ausgefüllt werden kann. Die Differenz zwischen L und L_M kann dann mit

$$\Delta L = \mu_0 \chi Q \frac{n^2}{l} \quad (3.2)$$

und dem Querschnitt Q der Probe berechnet werden. Es wird allerdings deutlich, dass der auftretende Unterschied nur sehr klein ist und man eine hohe Auflösung für die L -Messung erreichen muss.

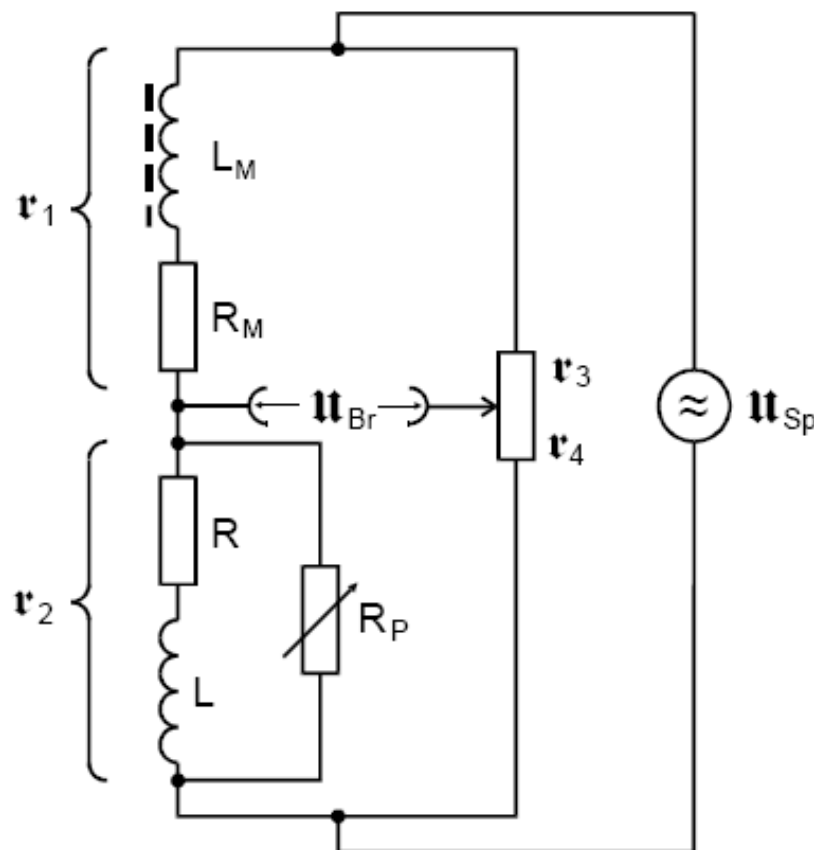


Abbildung 1: Suszeptibilitätsmessung über eine Brückenschaltung

Dies gelingt, wenn man zur Messung eine Brückenschaltung mit zwei möglichst gleichen Spulen (Abbildung 1) verwendet. In solchen Schaltungen wird die Poten-

tialdifferenz zwischen zwei Punkten auf getrennten stromdurchflossenen Leitern bestimmt. Diese ist jeweils abhängig von den Widerstandsverhältnissen. Dabei bezeichnet man die gemessene Spannung als Brückenspannung. Über die KIRCHHOFF'schen Gesetze lässt sich die Abgleichbedingung

$$(R_M + i\omega L_M) R'_4 = (R + i\omega L) R'_3$$

bestimmen. Mit den bekannten Größen aus (3.1) und (3.2) besteht jetzt die Möglichkeit die Suszeptibilität zu berechnen:

$$\chi = 2 \frac{\Delta R F}{R_3 Q}. \quad (3.3)$$

Einen weiteren Vergleichswert kann man vorher schon, durch Messung der Änderung der Brückenspannung nach Einführen der Probe in die Spule, gewinnen. Es wird wieder auf die Formeln (3.1) und (3.2) zurückgegriffen, um die Brückenspannung

$$U_{Br} = \frac{\omega \mu_0 \chi n^2 Q}{4l} \frac{1}{\sqrt{R^2 + \omega^2 (\mu_0 \frac{n^2}{l} F)^2}} U_{Sp}$$

zu bestimmen. Für hinreichend hohe Messfrequenzen ($\omega^2 L^2 \gg R^2$) lässt sich der gesuchte Zusammenhang schreiben als:

$$\chi(\omega \rightarrow \infty) = 4 \frac{F U_{Br}}{Q U_{Sp}} \quad (3.4)$$

3.2 Störspannungen und Selektivverstärker

Bei der Messung der Brückenspannung U_{Br} sind die immer vorhandenen und an den Ausgangsklemmen der Brückenschaltung auftretenden Störspannung in großem Maße problematisch und erschweren eine präzise Messung der Spannung. Es ist jedoch möglich, über einen **Selektivverstärker** lediglich die monofrequente Signalspannung passieren zu lassen. Der Selektivverstärker ist prinzipiell ein Bandpass, dessen Filterkurve - zu sehen in Abbildung 2 - die Gestalt einer Glockenkurve hat. Über die **Güte** Q des Selektivverstärkers lässt sich die Wirksamkeit der Störspannungsunterdrückung betrachten.

$$Q = \frac{\nu_0}{\nu_+ - \nu_-} \quad (3.5)$$

Frequenzen, die in der Nähe von ν_0 liegen, können den Filter teilweise wenn auch abgeschwächt passieren. Mit höherer Güte lässt sich dies jedoch auf ein akzeptables Minimum reduzieren.

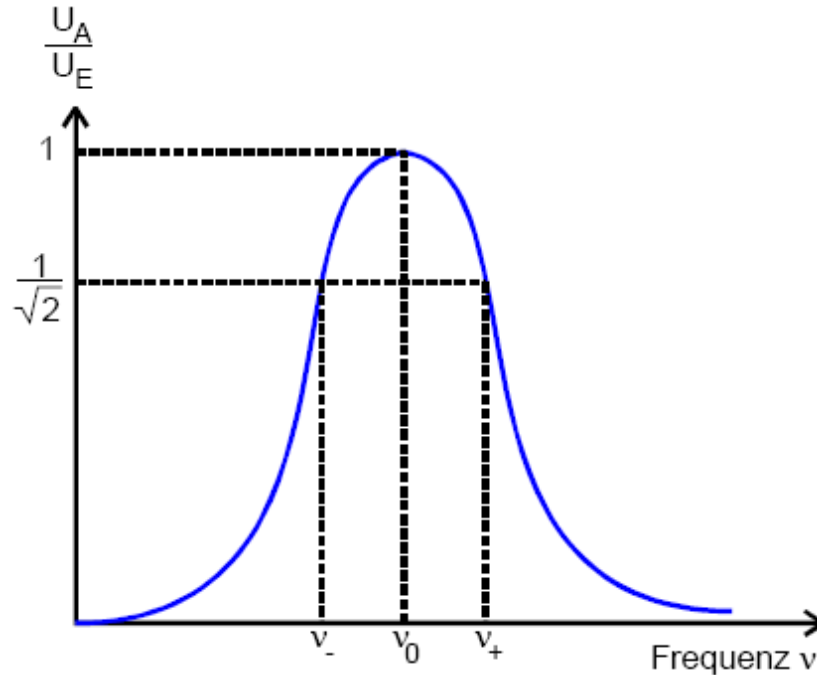


Abbildung 2: Filterkurve eines Selektivverstärkers

Die eigentliche Messung wird mit einer durch einen Sinusgenerator erzeugten Wechselspannung mit einregelbarer Frequenz von 20 – 40 kHz und einer Spannung von ca. $1 V_{\text{eff}}$ durchgeführt. Abbildung 3 zeigt den Versuchsaufbau schematisch.

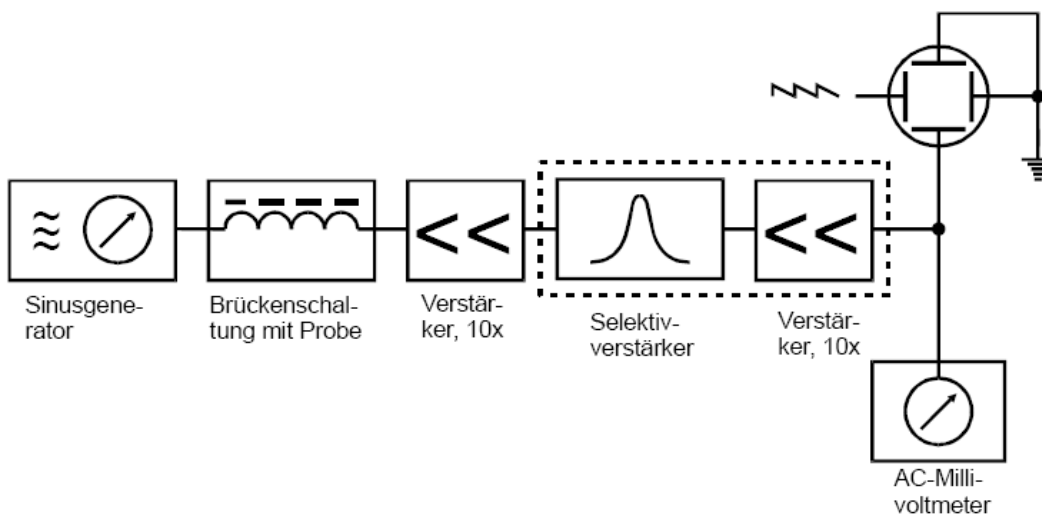


Abbildung 3: Schaltungskizze der verwendeten Messapparatur

4 Auswertung

4.1 Hinweise zur Fehlerrechnung

Bei der Auswertung der Messdaten wurden lediglich die folgenden drei Formeln angewandt: Der Mittelwert \bar{x} einer Messreihe mit n unabhängigen Messdaten x_i errechnet sich aus

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i. \quad (4.1)$$

Der beste Schätzwert auf einen absoluten Fehler Δx ist dann

$$\Delta x = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (\bar{x} - x_i)^2} \quad (4.2)$$

und der relative Fehler r_x folgt aus

$$r_x = \frac{\Delta x}{\bar{x}} \quad (4.3)$$

4.2 Bestimmung der Verstärkungsfaktoren

Zur Bestimmung der Verstärkungsfaktoren des Vorverstärkers am Selektivverstärker V_1 und des Linearverstärkers V_2 werden jeweils drei voneinander unabhängige Messungen durchgeführt. Bei beiden Verstärkern wurde je dreimal das gleiche Ergebnis erzielt. Am Vorverstärker wird bei einer Eingangsspannung $U_E = 0.18 \text{ V}$ eine Ausgangsspannung $U_A = 1.75 \text{ V}$ gemessen.

$$\Rightarrow V_1 = 9.72 \quad (4.4)$$

Der Linearverstärker liefert bei gleicher Eingangsspannung $U_A = 1.68 \text{ V}$

$$\Rightarrow V_2 = 9.31. \quad (4.5)$$

4.3 Bestimmung der Güte des Selektivverstärkers

Die Messwerte der Kennlinie des Selektivverstärkers sind in Tabelle 1 wiedergegeben. In den Quotienten $\frac{U_A}{U_E}$ fließt ausserdem der Verstärkungsfaktor V_1 ein, um den das Eingangssignal zunächst verstärkt wurde. Abbildung 4 zeigt die Messwerte und einen zugehörigen LORENTZ-Fit, angefertigt mit ORIGIN 7.5. Aus den Daten lässt

sich eine Breite der Kurve von $\Delta\nu = 710 \text{ Hz}$ ablesen. (3.5) liefert damit für die Güte Q des Selektivverstärkers

$$Q = 49.3. \quad (4.6)$$

$\nu [\text{Hz}]$	$U_A [\text{V}]$	$\frac{U_A}{V_1 \cdot U_E}$	$\nu [\text{Hz}]$	$U_A [\text{V}]$	$\frac{U_A}{V_1 \cdot U_E}$
30000	0.130	0.0652	35050	1.90	0.9535
30500	0.145	0.0728	35100	1.80	0.9033
31000	0.160	0.0803	35150	1.75	0.8782
31500	0.185	0.0928	35200	1.65	0.8281
32000	0.215	0.1079	35250	1.55	0.7779
32500	0.255	0.1280	35300	1.40	0.7026
33000	0.310	0.1556	35350	1.30	0.6524
33500	0.405	0.2033	35400	1.25	0.6273
34000	0.590	0.2961	35450	1.15	0.5771
34500	1.05	0.5269	35500	1.05	0.5269
34550	1.15	0.5771	36000	0.580	0.2911
34600	1.20	0.6022	36500	0.390	0.1957
34650	1.30	0.6524	37000	0.295	0.1480
34700	1.40	0.7026	37500	0.240	0.1204
34750	1.55	0.7779	38000	0.195	0.0979
34800	1.65	0.8281	38500	0.165	0.0828
34850	1.75	0.8782	39000	0.145	0.0728
34900	1.85	0.9284	39500	0.130	0.0652
34950	1.90	0.9535	40000	0.115	0.0577
35000	1.90	0.9535			

Tabelle 1: Messwerte der Kennlinie des Selektivverstärkers bei einer Eingangsspannung von 0.205 V und einem Verstärkungsfaktor $V_1 = 9.72$

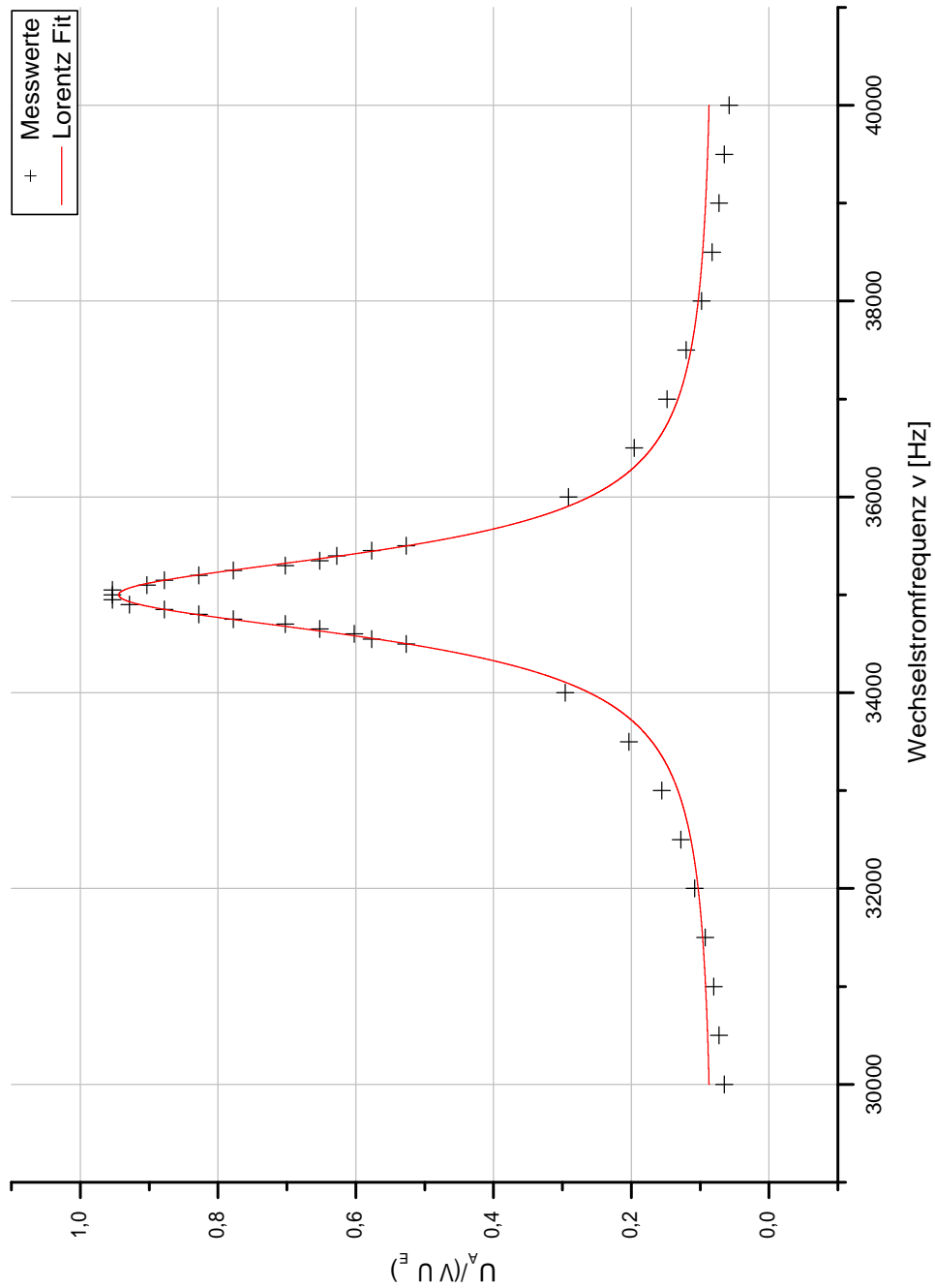


Abbildung 4: Kennlinie des Selektivverstärkers

4.4 Experimentelle Bestimmung der magnetischen Suszeptibilität

In den folgenden Tabellen (2-4) werden die Daten zur Ermittlung der magnetischen Suszeptibilität der jeweiligen Substanzen angegeben. Dabei errechnen sich die χ_U nach (3.4) und die χ_R nach (3.3). Der Koeffizient Q muss darin durch den Querschnitt

$$Q_{real} = \frac{m}{l \cdot \rho} \quad (4.7)$$

ersetzt werden, der sich aus der Masse m und der Länge l sowie der Dichte ρ der Probe ergibt. Er gibt den Querschnitt an, den die Probe hätte, wenn sie aus einem Einkristall bestünde. Es ist zu beachten, dass in Reihe mit den Widerständen R_3 und R_4 noch jeweils ein weiterer Widerstand mit dem Wert $R = 998 \Omega$ geschaltet ist. Die gemessenen Spannungen wurden um die Verstärkung $V = V_1 \cdot V_2$ bereinigt. Anschließend wird jeweils der Mittelwert nach (4.1) gebildet und dann der Fehler nach (4.2) und (4.3) bestimmt. Gemessen wurde mit einer Eingangsspannung $U_E = 0.45 \text{ V}$. Der Querschnitt der Spule beträgt $F = 8.7 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2$.

U_{Br} [mV]	R_3 [Ω]	U'_{Br} [mV]	R'_3 [Ω]	χ_U	χ_R
0.525	2.737	36.5	1.106	0.024715	0.022539
0.510	2.737	36.5	1.110	0.024726	0.022484
0.525	2.737	36.5	1.108	0.024715	0.022518
0.490	2.737	36.5	1.110	0.024739	0.022484
0.590	2.737	36.5	1.110	0.024671	0.022484

Tabelle 2: Werte zur experimentellen Bestimmung der magnetischen Suszeptibilität bei Dy_2O_3

Für die Probe von Dy_2O_3 mit $l = 0.173 \text{ m}$, $m = 0.0169 \text{ kg}$ und $\rho = 7800 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ erhalten wir also

$$\begin{aligned} \overline{\chi_U} &= 0.024713 \pm 0.000012 \\ &= 0.024713 \pm 0.047 \% \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overline{\chi_R} &= 0.022502 \pm 0.000011 \\ &= 0.022502 \pm 0.051 \%. \end{aligned}$$

U_{Br} [mV]	R_{Abgl} [Ω]	U'_{Br} [mV]	R'_{Abgl} [Ω]	χ_U	χ_R
0.600	2.74	21.25	1.79	0.013060	0.012022
0.600	2.74	21.50	1.78	0.013219	0.012289
0.550	2.74	21.25	1.78	0.013092	0.012200
0.600	2.74	21.25	1.84	0.013060	0.011405
0.580	2.74	21.25	1.78	0.013073	0.012207

Tabelle 3: Werte zur experimentellen Bestimmung der magnetischen Suszeptibilität bei Gd_2O_3

Die magnetische Suszeptibilität einer Probe Gd_2O_3 mit $l = 0.149$ m, $m = 0.015$ kg und $\rho = 7400 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ ermitteln wir zu

$$\begin{aligned}\overline{\chi_U} &= 0.013101 \pm 0.000030 \\ &= 0.013101 \pm 0.23 \%\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{\chi_R} &= 0.012025 \pm 0.000161 \\ &= 0.012025 \pm 1.34 \%\end{aligned}$$

U_{Br} [mV]	R_{Abgl} [Ω]	U'_{Br} [mV]	R'_{Abgl} [Ω]	χ_U	χ_R
0.580	2.74	1.975	2.66	0.001763	0.002021
0.550	2.74	2.000	2.65	0.001832	0.002148
0.550	2.74	2.000	2.65	0.001832	0.002135
0.570	2.74	2.000	2.66	0.001807	0.002109
0.570	2.74	2.000	2.65	0.001807	0.002224

Tabelle 4: Werte zur experimentellen Bestimmung der magnetischen Suszeptibilität bei Nd_2O_3

Und für Nd_2O_3 mit $l = 0.173$ m, $m = 0.00848$ kg und $\rho = 7240 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ ergeben sich als experimentelle Werte

$$\begin{aligned}\overline{\chi_U} &= 0.001808 \pm 0.000013 \\ &= 0.001808 \pm 0.70 \%\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{\chi_R} &= 0.002127 \pm 0.000033 \\ &= 0.002127 \pm 1.54 \%\end{aligned}$$

4.5 Theoretische Berechnung der magnetischen Suszeptibilität

In Tabelle 5 werden die atomaren Kenndaten der jeweiligen Moleküle dargestellt. Mit ihnen lassen sich die Werte für die magnetischen Suszeptibilitäten χ einfach mit Formel (2.3) ableiten. Die nötigen Konstanten sind:

$$e_0 = 1.602 \cdot 10^{-19} \text{C}$$

$$m_0 = 9.109 \cdot 10^{-31} \text{kg}$$

$$\hbar = 1.055 \cdot 10^{-34} \text{Js}$$

$$\mu_0 = 1.257 \cdot 10^{-6} \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{A}^2 \cdot \text{s}^2}$$

$$k_B = 1.381 \cdot 10^{-23} \text{J/K}$$

$$T = 295.3 \text{K}$$

Die Werte für N berechnen sich aus $N = 2 \cdot \rho/m$ mit $m =$ Masse eines Moleküls. J , L und S kommen aus den HUND'schen Regeln.

Element	$\rho[\text{kg}/\text{m}^3]$	J	L	S	$m[\text{u}]$	$m[\text{kg} \cdot 10^{-25}]$	$N[10^{28}]$	g_J	χ
Dy_2O_3	7800	7.5	5	2.5	373.00	6.19	2.52	1.33	0.0252
Gd_2O_3	7400	3.5	0	3.5	362.50	6.02	2.46	2.00	0.0137
Nd_2O_3	7240	4.5	6	1.5	336.48	5.59	2.59	0.73	0.0030

Tabelle 5: Tabelle zur theoretischen Berechnung von χ

5 Diskussion

Bei der Bestimmung der Güte des Selektivverstärkers fällt zunächst auf, dass die Güte mit $Q \approx 50$ nur etwa bei der Hälfte des eingestellten Wertes $Q = 100$ liegt. Trotzdem ist hier davon auszugehen, dass die Messung weitestgehend korrekt ist, da vor allem im Bereich der Resonanzfrequenz des Verstärkers die Messwerte sehr gut mit dem Fit zusammen passen.

Die Messung der magnetischen Suszeptibilitäten ist insgesamt zufriedenstellend ausgefallen. Die Fehler liegen hier bei maximal 1.5%. Jedoch ist leicht festzustellen, dass die Bestimmung von χ mit Hilfe der Brückenspannung die genauere ist, da sowohl die statistischen Fehler bedeutend kleiner sind, als auch die ermittelten Werte besser mit den Theoriewerten übereinstimmen. Zur besseren Übersicht sind alle Werte noch einmal in Tabelle 6 dargestellt.

	Theorie	Exp. U	Exp. R
Dy_2O_3	0.0252	0.0247	0.0225
Gd_2O_3	0.0137	0.0131	0.0120
Nd_2O_3	0.0030	0.0018	0.0021

Tabelle 6: Vergleich der χ Werte aus Theorie und Experiment

Die starke Abweichung der χ -Werte von Nd_2O_3 gegenüber der Theorie lassen sich dabei wohl dadurch erklären, dass die gemessenen Spannungs- und Widerstandsdifferenzen hier sehr gering sind. Insgesamt kann aber behauptet werden, dass sich die theoretischen Erwartungen im Experiment bestätigt haben.

6 Literatur & Bildnachweise

Alle Abbildungen aus Abschnitt 2 und 3 sind aus dem Praktikumsskript entnommen. Werte der physikalischen Konstanten aus www.wikipedia.org am 19.01.2006

Messung der Suszeptibilität paramagnetischer Substanzen (606)

Experimentelle Übungen für Physiker

Version vom 22. Januar 2006

<http://berniers-lee.physik.uni-dortmund.de/praktikum/>

AP-Anleitungen/Atomphysik/Versuch\%20Nr.606.pdf